

Kombinatorika a grafy 1 — 5. cvičení*

1. listopadu 2024

1 Konečné projektivní roviny

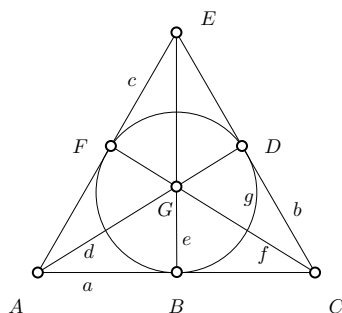
Nechť X je konečná množina a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$. Potom dvojici (X, \mathcal{P}) nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

(A1) $\forall x, y \in X, x \neq y \exists! P \in \mathcal{P} : x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).

(A2) $\forall P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q : |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).

(A3) $\exists C \subseteq X, |C| = 4 \forall P \in \mathcal{P} : |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

Řád projektivní roviny (X, \mathcal{P}) se rovná počtu bodů na přímce minus jedna (víme, že všechny přímky obsahují stejný počet bodů). Víme také, že konečná projektivní rovina řádu n obsahuje $n^2 + n + 1$ přímek a bodů a také že každý bod leží na právě $n + 1$ přímkách. Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Příklad 1. Bez použití duality dokažte, že každá konečná projektivní rovina řádu n obsahuje $n^2 + n + 1$ přímek. Hint: počítání dvěma způsoby.

Příklad 2. Uvažme karetní hru Dobble, která je založena na konečné projektivní rovině řádu 7. Na každé kartě v Dobble je právě 8 obrázků a hra využívá fakt, že každé dvě karty se shodují na právě jednom obrázku. Pro jaké hodnoty $n \in \mathbb{N}$ dokážete zkonstruovat takovou hru s právě n obrázky na každé kartě tak, aby se každý obrázek objevil na aspoň jednom páru karet?

Příklad 3. V Transylvánské loterii se náhodně losují tři různá čísla z čísel 1 až 14. Hráč si před slosováním za koupení jednoho lístku může vybrat tři čísla, přičemž vyhraje, pokud jsou mezi vylosovanými čísly aspoň dvě jím vybraná čísla. Vymyslete strategii, jak zakoupit co nejméně lístků tak, abyste měli zaručenou výhru. S kolika lístky to zvládnete?

Příklad 4. Bez křížení hran nakreslete na reálnou projektivní rovinu

(a) graf K_5 ,

(b) graf K_6 .

Příklad 5. (a) Ukažte, že existuje graf s N vrcholy a s aspoň $\Omega(N^{3/2})$ hranami, který neobsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf.

(b) Bonusový příklad (*): ukažte, že každý takový graf má nanejvýš $O(N^{3/2})$ hran. Hint: dvěma způsoby spočítejte počet kopií $K_{1,2}$.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

2 Latinské čtverce

Latinský čtverec řádu n je tabulka o rozměrech $n \times n$ nad prvky z $\{1, 2, \dots, n\}$, kde se každé číslo v každém sloupci a řádku vyskytuje právě jednou. Dva latinské čtverce L a L' jsou *ortogonální*, pokud pro každou uspořádanou dvojici čísel (a, b) z $\{1, 2, \dots, n\}$ existuje $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $(a, b) = ((L)_{ij}, (L')_{ij})$. Množina $\{L_1, L_2, \dots, L_t\}$ Latinských čtverců je množinou *navzájem ortogonálních Latinských čtverců*, pokud každé dva čtverce z této množiny jsou ortogonální. Tři navzájem ortogonální latinské čtverce řádu 4:

1	2	3	4
4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	4	3

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Příklad 6. Rozhodněte, zda permutace řádků a sloupců zachovávají vlastnost být latinským čtvercem a zda tyto operace zachovávají ortogonalitu.