Kombinatorika a grafy 1 — 4. cvičení*

25. října 2024

1 Vytvořující funkce potřetí a naposledy

Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$.

Příklad 1. *Rozklad čísla $n \in \mathbb{N}$ je zápis n jako součtu přirozených čísel (nezáleží nám na pořadí sčítanců).*

(a) Nechť a_n značí počet rozkladů čísla n. Jaká je vytvořující funkce pro posloupnost $(a_1, a_2, \ldots)$?

(b) Ukažte, že počet rozkladů n na liché části se rovná počtu rozkladů n na vzájemně různé části.

Příklad 2. Bloková fontána *je uspořádání mincí do řádků tak, že mince v každém řádku tvoří souvislý blok a v každém vyšším řádku se každá mince dotýká právě dvou mincí pod ní; viz Obrázek 2. Pro $n \geq 0$ buď f_n počet blokových fontán s n mincemi ve spodním řádku ($f_0 = 1$).*

(a) (*) Určete vytvořující funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

(b) Dokažte, že $f_n = F_{2n-1}$ pro $n \geq 1$, kde F_k je Fibonacciho číslo určené předpisem $F_1 = 1, F_2 = 1$ a $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ for $k \geq 1$.

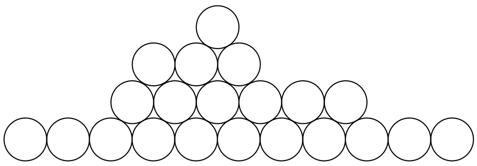

Figure 1: Příklad blokové fontány s 11 mincemi ve spodním řádku.

Příklad 3. *Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku $n = 1, 2, \ldots$ rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva či doprava.*

(a) Pro $n \in \mathbb{N}$ určete pravděpodobnost u_{2n} jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme do počátku.

(b) Určete vytvořující funkci $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} x^n$.

(c) Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je f_{2n} pravděpodobnost jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme poprvé *do počátku. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $f_0 = 0$ a $u_0 = 1$ platí*

$$u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0.$$

(d) Za použití výsledků z předešlých částí určete vytvořující funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} x^n$ a její koeficienty f_{2n} (a tedy i pravděpodobnosti, že se poprvé vrátíme do počátku po $2n$ krocích).

(e) Ukažte, že suma $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}$ konverguje a za použití tohoto faktu ukažte, že pravděpodobnost návratu do počátku se rovná jedné.

Příklad 4. *S pomocí vytvořujících funkcí sečtěte následující řady.*

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$.

Nechť $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x)+b(x)$	$(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^i a_i, \ldots)$
$x^k a(x)$	$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots)$ (střídavě $k-1$ nul)
$\frac{a(x)-a_0-\cdots-a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ia_i, \ldots)$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_i}{i+1}, \ldots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$