Kombinatorika a grafy 1 — 2. cvičení*

11. října 2024

1 Vytvořující funkce – úvod

Příklad 1. *(a) Mějme polynomy* $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ *a* $q(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$*. Jaký je koeficient u členu* x^7 *v jejich součinu* $p(x)q(x)$*?*

(b) Vracíme se z nákupu s pěti jednokilovými položkami a třemi dvoukilovými. Máme s sebou tašku, která unese maximálně sedm kilogramů. Kolika způsoby můžeme maximálně naplnit tašku?

Příklad 2. *Kolika způsoby můžeme naplnit košík* $n \in \mathbb{N}_0$ *kousky ovoce tak, aby:*

- *počet jablek byl sudý,*
- *počet švestek byl násobek pěti,*
- *v košíku byly nanejvýš čtyři pomeranče*
- *a nanejvýš jedno avokádo?*

Sestrojte příslušnou mocninnou řadu.

2 Vytvořující funkce – počítání s mocninnými řadami

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná. Jako *(obyčejnou) vytvořující funkci* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ označíme mocninnou řadu $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$ a podle binomické věty je $(1+x)^n$ vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots)$. Přechod mezi posloupnostmi a funkcemi je pro tuto techniku klíčový.

Binomická věta. *Pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \cdots + \binom{n}{n} x^n.$$

Tvrzení. *Buď* $(a_0, a_1, \ldots)$ *posloupnost reálných čísel. Nechť existuje* K *takové, že* $|a_i| \leq K^i$ *pro všechna* i*. Potom pro každé* $x \in (\frac{-1}{K}, \frac{1}{K})$ *řada* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci* $a(x)$ *proměnné* x *na uvedeném intervalu. Hodnotami* $a(x)$ *na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy* $a_0, a_1, \ldots$ *jednoznačně určeny,* $a(x)$ *má v 0 derivace všech řádů a platí*

$$a_i = \frac{a^{(i)}(0)}{i!}.$$

Příklad 3. *Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):*

(a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \ldots)$,

(b) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$,

(c) $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$,

(d) $(0, 2, 6, 12, 20, \ldots)$*, tedy* n*-tý člen je součtem prvních* n *sudých přirozených čísel včetně nuly.*

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 4. *Určete koeficient*

(a) u x^{10} *v* $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$,

(b) u x^{2024} *v* $\sin(x)$.

Příklad 5. *Zjistěte, čemu se rovná* a_n, *které je zadané rekurentní rovnicí* $a_0 = 1$, $a_1 = 9$ *a* $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ *pro* $n \geq 0$.

Příklad 6. *Zjistěte, čemu se rovná* a_n, *které je zadané rekurentní rovnicí* $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ *a* $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ *pro* $n \geq 0$.

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^i a_i, \ldots)$
$x^n a(x)$	$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ (n nul na začátku)
$a(x^n)$	$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots)$ (střídavě $n-1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \cdots - a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}$	$(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ia_i, \ldots)$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_i}{i+1}, \ldots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$