

Kombinatorika a grafy 1 — 13. cvičení*

10. ledna 2025

1 Samoopravné kódy

Abeceda Σ je konečná množina q symbolů. Slovo délky n je uspořádaná n -tice symbolů. Jako Σ^n označíme množinu slov délky n . Hammingova vzdálenost slov $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \Sigma^n$ je definována jako $d(x, y) = |\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq y_i\}|$. (Blokový) kód je množina $C \subseteq \Sigma^n$ takzvaných kódových slov. Řekneme, že s kódem C je možné opravit nanejvýš t chyb, pokud pro každé $y \in \Sigma^n$ existuje nanejvýš jedno $x \in C$ takové, že $d(x, y) \leq t$. Parametry kódu C jsou $(n, k, d)_q$, kde $k = \log_q |C|$ a $d = \min_{x \neq y \in C} \{d(x, y)\}$.

Lineární kód C je podprostorem vektorového prostoru \mathbb{F}_q^n , kde $\Sigma = \mathbb{F}_q$ je konečné těleso velikosti q . Nechť C je lineární kód s parametry $[n, k, d]_q$. Duálním kódem k C je kód $C^\perp = \{y \in \mathbb{F}_q^n : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pro každé } x \in C\}$, kde pro $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}_q^n$ je $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Generující maticí kódu C je matice $M \in \mathbb{F}_q^{k \times n}$, která má za řádky vektory báze kódu C . Kontrolní maticí kódu C je matice $M^\perp \in \mathbb{F}_q^{(n-k) \times n}$, která je generující maticí kódu C^\perp .

Příklad 1. Dokažte, že Hammingova vzdálenost je na množině Σ^n metrikou.

Příklad 2. Nechť C je lineární kód s parametry $[n, k, d]_q$. Dokažte následující tvrzení.

- Platí $C^\perp = \{y \in \mathbb{F}_q^n : My = 0\}$, kde M je generující maticí kódu C .
- Duální kód C^\perp je lineárním kódem s délkou slov n a s dimenzí $n - k$. Speciálně platí $\dim(C) + \dim(C^\perp) = n$.
- Platí $(C^\perp)^\perp = C$.
- Platí $C = \{x \in \mathbb{F}_q^n : M^\perp x = 0\}$, kde M^\perp je kontrolní maticí kódu C .

Příklad 3. Nechť C je kód s parametry $(n, k, 2t + 1)_2$ nad abecedou $\{0, 1\}$. Rozhodněte, jaké jsou parametry kódu C' , který z C vznikne prodloužením každého kódového slova o jeden symbol určující paritu počtu jedniček v daném slově.

Příklad 4. Dokažte, že Hadamardovy kódy (nad tělesem \mathbb{F}_2) vzniklé Sylvesterovou konstrukcí jsou lineární.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>