Kombinatorika a grafy 1 — 12. cvičení*

20. prosince 2024

1 Ramseyova teorie

Pro $k \in \mathbb{N}$ nazveme *k-obarvením* množiny X libovolnou funkci $f\colon X \to C$, kde C je množina *k barev.* Pro $p, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ definujme *Ramseyovo číslo* $R_p(n_1, \dots, n_k)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé k-obarvení množiny $\binom{\{1,\dots,N\}}{p}$ existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že dané k-obarvení obsahuje podmnožinu $X \subseteq \{1, \dots, N\}$ velikosti n_i se všemi p-ticemi z $\binom{X}{p}$ obarvenými i-tou barvou.

Ramseyova věta. *Pro každé $p, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ je číslo $R_p(n_1, \dots, n_k)$ konečné.*

Ramseyova věta platí i v následující nekonečné verzi.

Ramseyova věta (nekonečná verze). *Pro každé $p, k \in \mathbb{N}$ a pro každé k-obarvení množiny $\binom{\mathbb{N}}{p}$ existuje nekonečná $X \subseteq \mathbb{N}$ taková, že všechny její p-tice mají v daném k-obarvení stejnou barvu.*

Příklad 1. *(a) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $M(n)$ takové, že každá $\{0,1\}$-matice s rozměry $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ podmatici, která obsahuje buď jen nuly nebo jen jedničky.*

(b) Sestrojte libovolně velkou $\{0,1\}$-matici, která neobsahuje 2×2 matici se samými jedničkami a ani 2×2 matici se samými nulami jako diagonální podmatici. *Matice A o rozměrech $n \times n$ je diagonální podmaticí matice B o rozměrech $N \times N$, pokud existuje $R \subseteq \{1, \dots, N\}$, $|R| = n$, taková, že vybráním řádků a sloupců matice B s indexy z R získáme matici A.*

(c) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $DM(n)$ takové, že každá $\{0,1\}$-matice s rozměry $DM(n) \times DM(n)$ obsahuje $n \times n$ diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále totožné, všechny prvky nad diagonálou totožné a také všechny prvky pod diagonálou totožné.

Příklad 2. *Dokažte Schurovu větu. Ukažte, že ro každé k existuje dost velké $N \in \mathbb{N}$ takové, že obarvíme-li prvky $[N]$ k barvami, pak vždy dokážeme najít $x, y, z \in [N]$, které mají stejnou barvu a platí $x + y = z$ (tj. najdeme jednobarevné řešení této rovnice).*

Hint: Zvolte $N = R_2(3, \dots, 3) - 1$ a sestrojte vhodný hranově 2-obarvený graf.

Příklad 3. *Dokažte Erdősovo–Szekeresovo lemma o posloupnostech. Dokažte, že pro každé $k, \ell \in \mathbb{N}$ každá posloupnost $(k-1)(\ell-1)+1$ různých reálných čísel obsahuje klesající podposloupnost k nebo rostoucí podposloupnost ℓ čísel (tedy po vyškrtání zbylých členů posloupnosti). Dokažte, že tento odhad je těsný.*

Příklad 4. *Erdősova–Szekeresova věta.*

(a) Ukažte, že každá množina P pěti bodů v rovině v obecné poloze (žádné 3 body z P neleží na přímce) obsahuje 4 body v konvexní poloze (body, které jsou vrcholy konvexního mnohoúhelníku).

(b) Ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina P s aspoň N body v rovině v obecné poloze obsahuje k bodů v konvexní poloze.

(c) Ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje přirozené $N = N(k)$ takové, že každá množina N bodů z $\mathbb{R}^3$ v obecné poloze (žádné 4 body neleží na společné rovině) obsahuje k bodů, které jsou vrcholy konvexního mnohostěnu.

Hint: Můžete využít Erdősovu–Szekeresovu větu v dimenzi 2.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/