

Kombinatorika a grafy 1 — 11. cvičení*

13. prosince 2024

1 Ramseyova teorie

Pro $k \in \mathbb{N}$ nazveme k -obarvením množiny X libovolnou funkci $f: X \rightarrow C$, kde C je množina k barev. Pro $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ definujeme Ramseyovo číslo $R_2(n_1, \dots, n_k)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé k -obarvení hran grafu K_N existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že dané k -obarvení obsahuje K_{n_i} jako podgraf se všemi hranami obarvenými i -tou barvou.

Ramseyova věta pro grafy. Pro každé $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ je číslo $R_2(n_1, \dots, n_k)$ konečné.

Platí, že $R_2(3, 3) = 6$ a $R_2(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$ pro každé $k, l \in \mathbb{N}$.

Označíme-li pro grafy H_1, \dots, H_k jako $R_2(H_1, \dots, H_k)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé k -obarvení hran grafu K_N existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že dané k -obarvení obsahuje H_i jako podgraf se všemi hranami obarvenými i -tou barvou, pak z Ramseyovy věty dostáváme $R_2(H_1, \dots, H_k) \leq R_2(|V(H_1)|, \dots, |V(H_k)|)$. Tedy i tato Ramseyovská čísla obecných grafů jsou vždy konečná.

Příklad 1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) Obarvíme-li dostatečně velký úplný graf se smyčkami dvěma barvami (barvíme hrany a smyčky), vždy existuje jednobarevný úplný podgraf se smyčkami na n vrcholech.
- (b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo doplněk G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf.
- (c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje doplněk $K_{n,n}$ jako podgraf.
- (d) Pro každý graf G existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že v libovolném 2-obarvení hran K_N najdeme jednobarevnou G jako indukovaný podgraf.

Příklad 2. Ukažte, že $R_2(C_4, C_4) = 6$, tedy že v každém červeno-modrém obarvení hran K_6 najdeme jednobarevný 4-cyklus, zatímco na K_5 se to už podařit nemusí.

Případně dokažte nejlepší odhady na $R(C_4, C_4)$, jaké zvládnete.

Příklad 3. Ukažte, že pro každé fixní $k \in \mathbb{N}$ existuje $N_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $N \geq N_0$ je v každém 2-obarvení hran grafu K_N aspoň $\Omega(N^k)$ kopií K_k se všemi hranami stejné barvy. Neboli ukažte, že od jistého počtu vrcholů není zaručena jen jedna jednobarevná kopie K_k , ale dokonce jich najdeme velmi mnoho.

Příklad 4. Jaký nejlepší dolní odhad na $R(n, n)$ dokážete odvodit?

Příklad 5. (*) Dokažte nerovnost $R_2(3, \dots, 3) \leq \lfloor e \cdot k! \rfloor + 1$ pro Ramseyovo číslo $R_2(3, \dots, 3)$ s k barvami.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>