- MÍRA SOUVISLOSTI GRAFŮ: 1

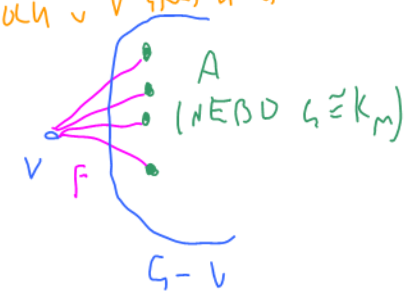
- PŘIPOMENUTÍ:
  - GRAF JE SOUVISLÝ, POKUD JSOU KAŽDÉ JEHO DVA VRCHOLY SPOJENÉ CESTOU
  - JINAK JE GRAF NESOUVISLÝ A JE ROZDĚLEN NA ≥ 2 KOMPONENTY SOUVISLOSTI
- BUDEME ZKOUMAT MÍRU SOUVISLOSTI GRAFŮ, ČILI JAK MOC JE GRAF ODOLNÝ PROTI ROZPADNUTÍ PŘI ODEBÍRÁNÍ HRAN ČI VRCHOLŮ
- HRANOVÝM ŘEZEM V GRAFU $G=(V,E)$ JE MNOŽINA HRAN $F \subseteq E$ TAKOVÁ, ŽE GRAF $G-F=(V,E\setminus F)$ JE NESOUVISLÝ (HRANOVÝ ŘEZ SE NĚKDY NAZÝVÁ SEPARÁTOR)
- VRCHOLOVÝM ŘEZEM V G JE MNOŽINA VRCHOLŮ $A \subseteq V$ TAKOVÁ, ŽE GRAF

$$G-A=\left(V\setminus A,\ E\cap\binom{V\setminus A}{2}\right)$$ JE NESOUVISLÝ

- HRANOVÁ SOUVISLOST GRAFU G JE $k_e(G)=\begin{cases}\min\{|F| : F \text{ JE HRANOVÝ ŘEZ V } G\} \\ 1 & G \cong K_1\end{cases}$ (≅ IZOMORFISMUS)
- VRCHOLOVÁ SOUVISLOST GRAFU G JE $k_v(G)=\begin{cases}\min\{|A| : A \text{ JE VRCHOLOVÝ ŘEZ V } G\} \\ 1 & G\cong K_1 \\ m-1 & G\cong K_m \text{ PRO } m\geq 2\end{cases}$
  - NESOUVISLÉ GRAFY MAJÍ VRCHOLOVOU I HRANOVOU SOUVISLOST 0
- PRO $k\in \mathbb{N}_0$ JE GRAF G HRANOVĚ k-SOUVISLÝ, POKUD $k_e(G)\geq k$
  VRCHOLOVĚ k-SOUVISLÝ, POKUD $k_v(G)\geq k$

(= STUPEŇ VRCHOLU v V GRAFU G)

- $\forall\, G=(V,E), G\not\cong K_1 : k_e(G), k_v(G) \leq \min\{\deg_G(v); v\in V\}$



- JAK SE MĚNÍ SOUVISLOST PŘI ODEBÍRÁNÍ HRAN?
- LEMMA 8.1:
  $\forall G=(V,E)\ \forall e\in E: k_e(G)-1 \leq k_e(G-e) \leq k_e(G)$
  - ČILI ODEBRÁNÍ HRANY SNÍŽÍ HRANOVOU SOUVISLOST O ≤ 1

- DK:
  1) $k_e(G-e)\leq k_e(G)$:
     - JE-LI F MINIMÁLNÍM ŘEZEM V G, PAK $F\setminus\{e\}$ JE HRANOVÝM ŘEZEM (NE NUTNĚ MINIMÁLNÍM) V $G-e$
     $\Rightarrow k_e(G-e)\leq |F\setminus\{e\}| \leq |F| = k_e(G)$
  2) $k_e(G)-1 \leq k_e(G-e)$:
     - JE-LI F MINIMÁLNÍM HRANOVÝM ŘEZEM V $G-e$, PAK $F\cup\{e\}$ JE HRANOVÝM ŘEZEM V G
     $\Rightarrow k_e(G)\leq |F\cup\{e\}| = |F|+1 = k_e(G-e)+1$ ∎

LEMMA 8.2:

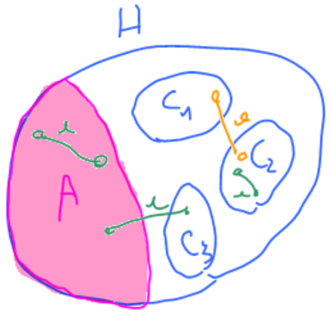
$\forall G=(V,E)\ \forall e \in E: \ k_v(G)-1 \le k_v(G-e) \le k_v(G)$

– čili i vrcholová souvislost také klesá o ≤ 1 po odebrání hrany

Dk:

- předpokládejme, že $G \ncong K_n$, jinak lze snadno ověřit
- 1) $k_v(G-e) \le k_v(G)$:
  - je-li A minimální vrcholový řez v G, pak A je vrcholový řez i v $G-e$ $\Rightarrow k_v(G-e) \le |A| = k_v(G)$
- 2) $k_v(G)-1 \le k_v(G-e)$:
  - ukážeme, že pro $H = G-e$ platí $k_v(H+e) \le k_v(H)+1$
  - protože $H \ncong K_n$, tak $\exists$ vrcholový řez A v H takový, že $k_v(H)=|A|$
  - $C_1, \dots, C_n$ = komponenty grafu $H-A$
  - možnosti podle umístění hrany e:
    - a) e nespojuje 2 komponenty v $H-A$:
      - tedy $e \cap A \neq \emptyset$ nebo $e \subseteq V(C_i)$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$
      - v $H+e$ je A stále vrcholovým řezem $\Rightarrow k_v(H+e) \le |A| = k_v(H)$
    - b) e spojuje 2 komponenty v $H-A$: $|V(C_1)| \ge |V(C_2)|$
      - BÚNO $e=\{x,y\}$, $x \in V(C_1)$, $y \in V(C_2)$
      - je-li $n \ge 3$, pak A je stále vrcholovým řezem v $H+e$ a máme $k_v(H+e) \le |A| = k_v(H)$
      - tedy $n=2$ ($H-A$ má jen 2 komponenty C_1 a C_2)
      - pokud $|V(C_1)|>1$, pak $A \cup \{x\}$ je vrcholovým řezem v $H+e$ $\Rightarrow k_v(H+e) \le |A \cup \{x\}| = |A|+1 = k_v(H)+1$
      - jinak $|V(C_1)| = 1 = |V(C_2)|$ a platí

$$k_v(H+e) \underset{\substack{\text{z definice } k_v(G) \text{ platí} \\ \text{pro každé } G \ncong K_n}}{\le} |V|-1 \underset{|A|=|V|-2}{=} |A|+1 = k_v(H)+1 \qquad \boxtimes$$



případ a)
případ b)

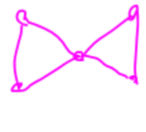
DŮSLEDEK 8.3:

$\forall G=(V,E): \ k_v(G) \le k_e(G)$ (vrcholová souvislost je $\le$ hranová souvislost)

Dk:

- indukcí podle $|E|$
- $|E| < |V|-1 \Rightarrow G$ je nesouvislý a $k_e(G)=0=k_v(G)$
- jinak máme $k_e(G) \ge 1$ a zvolme hranu $e \in E$ z min. hranového řezu v G
- potom $k_v(G)-1 \underset{\text{LEMMA 8.2}}{\le} k_v(G-e) \underset{\text{IP pro } G-e}{\le} k_e(G-e) \underset{\substack{\text{volba } e \text{ a} \\ \text{LEMMA 8.1}}}{=} k_e(G)-1 \qquad \boxtimes$

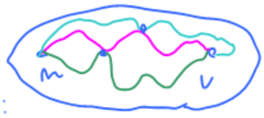
– nerovnost může být ostrá: „motýlek" M:



$k_e(M) = 2 > 1 = k_v(M)$

– **VĚTA 8.4 (FORDOVA – FULKERSONOVA VĚTA):**

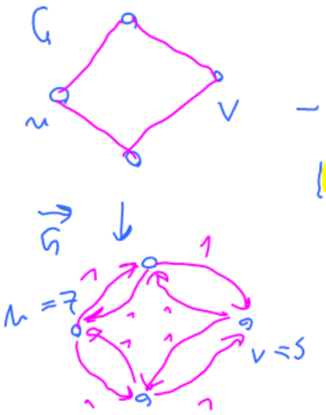
$\forall G \neq K_1, \forall t \in \mathbb{N} : k_e(G) \geq t \iff$ MEZI KAŽDÝMI 2 VRCHOLY GRAFU G $\exists \geq t$ HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST



– DK:

1) $\Leftarrow$: – SPOREM – NECHŤ $\exists$ HRANOVÝ ŘEZ F V G SPLŇUJÍCÍ $|F| < t$
– POTOM 2 VRCHOLY V RŮZNÝCH KOMPONENTÁCH GRAFU $G - F$ JSOU STÁLE SPOJENY $\geq t - |F| \geq 1$ (HRANOVĚ DISJ.) CESTAMI $\Rightarrow$ SPOR

2) $\Rightarrow$:



– MĚJME $G = (V, E)$ S $k_e(G) \geq t$ A VRCHOLY $u, v \in V$, KTERÉ CHCEME SPOJIT t HRANOVĚ DISJUNKTNÍMI CESTAMI
– Z G VYTVOŘÍME SÍŤ $(\vec{G}, u, v, \mathbb{1})$ NAHRAZENÍM KAŽDÉ HRANY $\{x, y\} \in E$ ZA (x, y) A (y, x), ZVOLENÍM ZDROJE $z = u$, STOKU $s = v$ A NASTAVENÍM JEDNOTKOVÝCH KAPACIT U VŠECH HRAN
– PODLE VĚTY O CELOČÍSELNOSTI V TÉTO SÍTI EXISTUJE MAXIMÁLNÍ CELOČÍSELNÝ TOK f
– f NABÝVÁ JEN HODNOT 0 A 1 A JE-LI  , TAK NASTAVÍME  (TÍM SE VELIKOST TOKU NEZMĚNÍ)

– PODLE HLAVNÍ VĚTY O TOCÍCH $\exists$ MIN. ŘEZ R S $c(R) = w(f)$
– POTOM $F = \{\{x, y\} : (x, y) \in R$ NEBO $(y, x) \in R\}$ JE HRANOVÝM ŘEZEM V G
↳ PROTOŽE R JE ŘEZEM V SÍTI A CESTA Z u, v V G $\Rightarrow$ OR. CESTA Z u DO v V SÍTI
– DOSTÁVÁME:

$$\underset{k_e(G) \geq t}{t \leq} |F| \underset{\text{VOLBA } F}{\leq} c(R) = w(f) \text{ A TEDY } w(f) \geq t$$

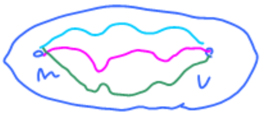
– NYNÍ INDUKCÍ PODLE $w(f)$ ZKONSTRUUJEME t CEST MEZI u A v:
– $w(f) = 1$ – PAK $\exists$ CESTA MEZI u A v, KDE NA KAŽDÉ HRANĚ TEČE 1
– $w(f) > 1$:
– $\exists$ CESTA P MEZI u A v, KDE NA KAŽDÉ HRANĚ TEČE 1 A TOK PO NÍ VYNULUJEME $\Rightarrow$ NA ZBYLÉM TOKU VELIKOSTI $\geq t - 1$ Z IP NAJDEME $\geq t - 1$ HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST MEZI u A v
– P JE S TĚMITO CESTAMI HRANOVĚ DISJUNKTNÍ, PROTOŽE NEMÁME 

⊠

– VARIANTA FORDOVY-FULKERSONOVY VĚTY PLATÍ I PRO VRCHOLOVOU SOUVISLOST

- **VĚTA 8.5 (MENGEROVA VĚTA):**

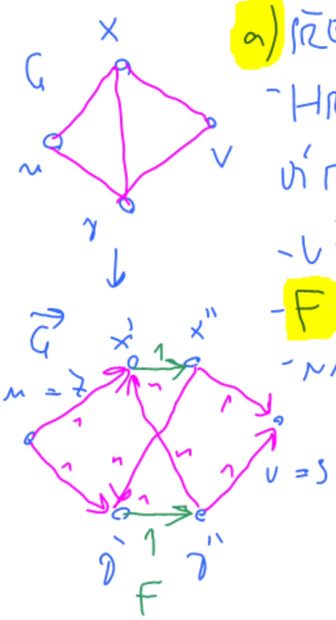
$\forall G \not\cong K_t \; \forall t \in \mathbb{N}: k_v(G) \geq t \iff$ mezi každými 2 vrcholy grafu G $\exists \geq t$ vrcholově disjunktních cest (mimo u, v)



- DK:
  - 1) $\Leftarrow$:
    - sporem - nechť $k_v(G) < t$ pro graf $G = (V, E)$
    - potom buď $G \cong K_m$ pro $m < t$ nebo $\exists$ vrcholový řez $A \subseteq V$ velikosti $< t$

      $\downarrow$ nenastane, protože pak $\nexists$ t vrcholově disjunktních cest mezi dvěma vrcholy

      $\downarrow$ nenastane, protože na rozpojení $\geq t$ vrcholově disjunktních cest v G je potřeba vrcholový řez velikosti $\geq t$ $\Rightarrow$ SPOR
  - 2) $\Rightarrow$:
    - nechť $k_v(G) = t$ pro graf $G = (V, E)$, chceme najít t vrcholově disjunktních cest mezi dvěma vrcholy $u, v \in V$



a) předpokládejme nejdřív $\{u, v\} \notin E$
- hrany G zdvojíme (x — y $\rightarrow$ $x \rightleftarrows y$), pouze hrany $\{u, x\}$ nahradíme hranami (u, x) a hrany $\{v, y\}$ nahradíme hranami (y, v)
- všechny vrcholy kromě u a v pak zdvojíme:

- $F = \{$hrany vzniklé zdvojením vrcholů$\}$
- nastavme $z = u$ jako zdroj a $s = v$ jako stok
  - všem hranám nastavíme jednotkové kapacity
    $\Rightarrow$ síť $(\vec{G}, u, v, \mathbb{1})$
  - podle **věty o celočíselnosti** ve vzniklé síti existuje tok f maximální velikosti $w(f)$
  - f nabývá jen hodnot 0 a 1
- podle **hlavní věty o tocích** v síti existuje řez R minimální kapacity $c(R) = w(f)$
- můžeme BÚNO předpokládat $R \subseteq F$
  - jinak lze hranu e z $R \setminus F$ nahradit hranou z F, se kterou sdílí vrchol
  - jediný případ, kdy by e nešlo nahradit, je $e = \{u, v\}$, to je ale zakázané podle našeho předpokladu $\{u, v\} \notin E$
- je-li $|R| \geq t$, pak podobně jako v předešlém důkazu najdeme t hranově disjunktních cest v síti mezi u a v
  - tedy indukcí podle $c(R) = w(f)$

5

- SPOREM – NECHŤ $|R| < t$
  - POTOM $A = \{x \in V : (x', x'') \in R\}$ JE VRCHOLOVÝM ŘEZEM V G A PLATÍ $|A| < t$
  - $\Rightarrow$ <u>SPOR</u> S $k_v(G) \geq t$
- ZBÝVÁ Z t HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST V SÍTI MEZI u A v ZKONSTRUOVAT t VRCHOLOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST V G
  - Z CESTY $(u, x_1', x_1'', x_2', x_2'', \dots, v)$ V SÍTI VYPLUŽÍME CESTU $(u, x_1, x_2, \dots, v)$
  - VZNIKLÉ CESTY V G JSOU VRCHOLOVĚ DISJUNKTNÍ (MIMO u A v), JINAK DVĚ PŮVODNÍ CESTY V SÍTI SDÍLÍ HRANU Z F

b) POKUD $e = \{u, v\} \in E$, TAK UKÁŽEME STEJNÝ POSTUP PRO $G - e$
  - $k_v(G - e) \geq t - 1$ PODLE LEMMA 8.2 A K $\geq t-1$ NALEZENÝM VRCHOLOVĚ DISJUNKTNÍM CESTÁM (MIMO u A v) LZE PŘIDAT HRANU e JAKO t-TOU CESTU

$\boxtimes$

- PROTOŽE NALÉZT TOK MAXIMÁLNÍ VELIKOSTI LZE V POLYNOMIÁLNÍM ČASE, TAK MÁME POLYNOMIÁLNÍ ALGORITMUS NA ZJIŠTĚNÍ $k_e(G)$ I $k_v(G)$