APLIKACE TOKŮ V SÍTÍCH:

1) KŐNIGOVA-EGERVÁRYHO VĚTA:

- V GRAFU $G=(V,E)$ NAZVEME MNOŽINU $C \subseteq V$ VRCHOLOVÝM POKRYTÍM, POKUD $C \cap e \neq \emptyset$ PRO $\forall e \in E$
- ZJISTIT MINIMÁLNÍ VELIKOST VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ JE NP-TĚŽKÁ ÚLOHA
- PÁROVÁNÍM V G JE PODGRAF TVOŘENÝ DISJUNKTNÍMI HRANAMI
- VĚTA 7.1 (KŐNIGOVA-EGERVÁRYHO VĚTA, 1931): V BIPARTITNÍM GRAFU JE VELIKOST MIN. VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ ROVNA VELIKOSTI MAXIMÁLNÍHO PÁROVÁNÍ
  ↪ CO DO POČTU HRAN

- URČIT VELIKOST MAX. PÁROVÁNÍ V OBECNÉM GRAFU LZE V POLYNOMIÁLNÍM ČASE
  ⇒ MÁME POLYNOMIÁLNÍ ALGORITMUS PRO NALEZENÍ MIN. VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ PRO BIPARTITNÍMI GRAFY

- DK:
  - Z BIPARTITNÍHO $G=(A \cup B, E)$ VYTVOŘÍME SÍŤ PŘIDÁNÍM ZDROJE Z, STOKU S A HRAN (Z,u) PRO $\forall u \in A$
    (v,S) PRO $\forall v \in B$
  - HRANY Z E ZORIENTUJEME Z A DO B A VŠEM NOVÝM HRANÁM DÁME KAPACITU 1 A STARÝM HRANÁM KAPACITU $m = |A|+|B|$
  - PODLE VĚTY 6.2 $\exists$ MAX. TOK f A MIN. ŘEZ R S $w(f) = c(R)$

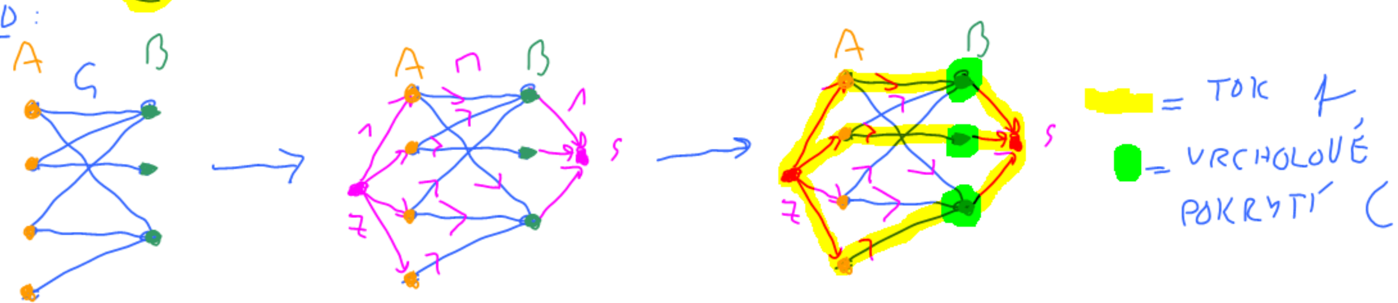
HLAVNÍ VĚTA O TOCÍCH

  - f JE CELOČÍSELNÝ PODLE VĚTY 6.6 → VĚTA O CELOČÍSELNOSTI

  1) $w(f)$ = VELIKOST MAX. PÁROVÁNÍ V G
     - STARÉ HRANY S NENULOVÝM TOKEM TVOŘÍ PÁROVÁNÍ V G
  2) $c(R)$ = VELIKOST MIN. VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ V G
     - ŘEZ R NEPOUŽÍVÁ STARÉ HRANY, PROTOŽE JEJICH KAPACITA m JE VĚTŠÍ NEŽ KAPACITA ŘEZU $\{(Z,v) : v \in A\}$
     ⇒ VRCHOLY Z $A \cup B$ INCIDENTNÍ S HRANAMI R TVOŘÍ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ VELIKOSTI $c(R)$
     - NAOPAK NOVÉ HRANY INCIDENTNÍ S VRCHOLY Z VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ $C \subseteq A \cup B$ GRAFU G TVOŘÍ ŘEZ KAPACITY $|C|$

$\boxtimes$

- PŘÍKLAD:



2) **HALLOVA VĚTA**:

- MĚJME KONEČNÉ MNOŽINY X A I
- **MNOŽINOVÝ SYSTÉM** $\mathcal{M}$ JE $(M_i : i \in I)$, KDE $M_i \subseteq X$
  - ↳ MNOŽINY M_i NEMUSÍ BÝT NUTNĚ RŮZNÉ
- **SYSTÉM RŮZNÝCH REPREZENTANTŮ** (SRR) PRO $\mathcal{M}$ JE PROSTÉ ZOBRAZENÍ $f : I \to X$ TAKOVÉ, ŽE $\forall i \in I : f(i) \in M_i$
  - TEDY f JE VÝBĚR JEDNOHO PRVKU Z KAŽDÉ M_i TAKOVÝ, ŽE ŽÁDNÝ PRVEK NEVYBEREME VÍCKRÁT

- **INCIDENČNÍM GRAFEM** SYSTÉMU $\mathcal{M}$ JE BIPARTITNÍ GRAF $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, E)$, KDE $E = \{\{i,x\} : i \in I, x \in X, x \in M_i\}$
- VŠIMNĚME SI, ŽE $\mathcal{M}$ MÁ SRR $\Leftrightarrow$ $G_{\mathcal{M}}$ OBSAHUJE PÁROVÁNÍ VELIKOSTI $|I|$

- **VĚTA 7.2 (HALLOVA VĚTA)**:

$$\mathcal{M} \text{ MÁ SRR} \Leftrightarrow \underbrace{\forall J \subseteq I : \left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |J|}_{\text{HALLOVA PODMÍNKA}}$$

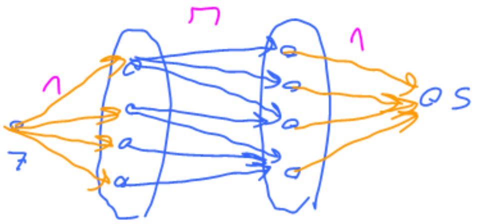
  - TEDY OČIVIDNĚ NUTNÁ PODMÍNKA PRO EXISTENCI SRR JE I DOSTAČUJÍCÍ
  - TAKÉ ZVANÉ „HALL'S MARRIAGE THEOREM", DOKÁZAL PHILIP HALL (1904 – 1982) V ROCE 1935

- DK:

(1) $\Rightarrow$:
- NECHŤ PRO $\mathcal{M}$ EXISTUJE SRR f
- ZVOLME $J \subseteq I$ A UVAŽME $\{f(j) : j \in J\}$
- MÁME $\left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |\{f(j) : j \in J\}| = |J|$ A TEDY PLATÍ HALLOVA PODMÍNKA

  $f(j) \in M_j$ PRO $\forall j \in J$ $\qquad$ f JE PROSTÉ

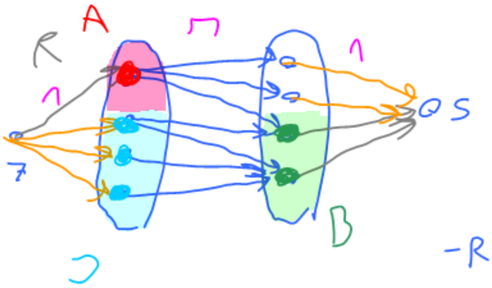
(2) $\Leftarrow$:
- NECHŤ PLATÍ HALLOVA PODMÍNKA, CHCEME NAJÍT SRR
- Z $G_{\mathcal{M}}$ VYTVOŘÍME SÍŤ PŘIDÁNÍM ZDROJE z A HRAN (z,i) PRO $i \in I$, PŘIDÁNÍM STOKU s A HRAN (x,s) PRO $x \in X$, ORIENTACÍ HRAN Z I DO X A PŘIDÁNÍM KAPACIT 1 PRO NOVÉ HRANY A $m := |I| + |X|$ PRO STARÉ



- PODLE **VĚTY 6.2** $\exists$ V SÍTI MAX. TOK g A MIN. ŘEZ R S $w(g) = c(R)$
- PODLE **VĚTY 6.6** JE TOK g CELOČÍSELNÝ

– Z VOLBY n VÍME, ŽE ŘEZ R POUŽÍVÁ JEN NOVÉ HRANY ③

– Z VOLBY KAPACIT A CELOČÍSELNOSTI g PO KAŽDÉ HRANĚ TEČE 0 NEBO 1



– DEFINUJME $A = \{i : (z,i) \in R\}$

$B = \{x : (x,s) \in R\}$

$J = I \setminus A$

– R JE ŘEZ $\Rightarrow$ HRANY Z J VEDOU JEN DO B

$\Rightarrow \bigcup_{j \in J} n_j \subseteq B$

$\left|\bigcup_{j\in J} n_j\right| \geq |J|$ PODLE HALLOVY PODMÍNKY

– KAPACITA ŘEZU R TAK SPLŇUJE

$$c(R) = |A| + |B| = |I| - |J| + |B| \geq |I| - |J| + \left|\bigcup_{j \in J} n_j\right| \geq |I|$$

KAPACITY NOVÝCH HRAN JSOU 1

$J = I \setminus A$

PO KAŽDÉ HRANĚ V g TEČE 0 NEBO 1

– PROTOŽE $w(g) = c(R)$, TAK VELIKOST TOKU g JE ASPOŇ $|I|$

– DEFINUJEME-LI $f : I \to X$ PŘEDPISEM $f(i) = X$, KDE $g(i,X) = 1$, PAK f BUDE SRR PRO M

– f JE ZOBRAZENÍ, PROTOŽE $w(f) \geq |I|$ A $g(e) \in \{0,1\}$

– f JE PROSTÉ, PROTOŽE JINAK TOK VELIKOSTI ≥ 2 NENÍ KUDY ODTÉCT DO S

– $f(i) \in n_i$, PROTOŽE $(i,X) \in E(G_m) \Leftrightarrow X \in n_i$ $\boxtimes$

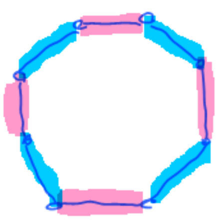
– **POZNÁMKY K HALLOVĚ VĚTĚ:**

- SPOUSTA APLIKACÍ
- S AXIOMEM VÝBĚRU LZE DOKÁZAT VARIANTU S KONEČNÝMI n_i A NEKONEČNÝMI I, X
  - S NEKONEČNÝMI n_i, I A X HALLOVA VĚTA PLATIT NEMUSÍ
- HALLOVA PODMÍNKA MÁ EXPONENCIÁLNĚ MNOHO PODMÍNEK, ALE SRR LZE POMOCÍ TOKŮ NAJÍT V POLYNOMIÁLNÍM ČASE

3) ROZŠIŘOVÁNÍ LATINSKÝCH OBDÉLNÍKŮ:

– **DŮSLEDEK 7.3:**
V KAŽDÉM BIPARTITNÍM GRAFU $G = (A \cup B, E)$ S $E \neq \emptyset$ A $\deg_G(x) \geq \deg_G(y)$ PRO KAŽDÉ $x \in A$, $y \in B$ EXISTUJE PÁROVÁNÍ VELIKOSTI $|A|$

$\deg_G(y)$ = STUPEŇ VRCHOLU y V GRAFU G



– ITEROVÁNÍM DŮSLEDKU 7.3 NA k-REGULÁRNÍM BIPARTITNÍM GRAFU G

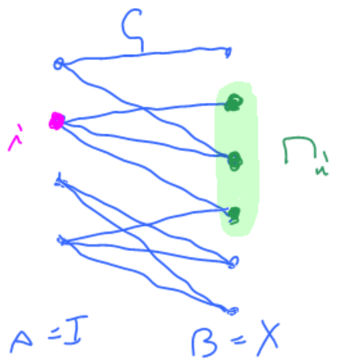
TEDY VŠECHNY STUPNĚ JSOU ROVNY k

LZE ROZLOŽIT $E(G)$ NA k DISJUNKTNÍCH PÁROVÁNÍ

– TO PROTO, ŽE PAK $k \cdot |A| = |E| = k \cdot |B|$

– DK:

– UVAŽME MNOŽINOVÝ SYSTÉM $\mathcal{M} = (M_i : i \in I = A)$, KDE $M_i \subseteq X = B$ JE SOUSEDSTVÍM VRCHOLU $i \in A$ V GRAFU G (TEDY $M_i = \{x \in X : \{i, x\} \in E\}$)



– V $\mathcal{M}$ PLATÍ HALLOVA PODMÍNKA:

– PRO $J \subseteq I$ JE $\bigcup_{j \in J} M_j$ MNOŽINA VRCHOLŮ Z B, KTERÉ MAJÍ ≥ 1 SOUSEDA V J

– OZNAČME $k_1 = \min_{j \in J} \deg_G(j)$ A $k_2 = \max_{x \in \bigcup_{j \in J} M_j} \deg_G(x)$

– Z PŘEDPOKLADU PLATÍ $k_1 \geq k_2$

– POČET Z HRAN MEZI J A $\bigcup_{j \in J} M_j$ V G SPLŇUJE $k_1 \cdot |J| \leq Z \leq k_2 \cdot |\bigcup_{j \in J} M_j|$

A Z $k_1 \geq k_2$ JE TAK $|J| \leq |\bigcup_{j \in J} M_j|$ $\Rightarrow$ HALLOVA PODMÍNKA PLATÍ

HALLOVA VĚTA

– VĚTA 7.2 $\Rightarrow$ $\exists$ SRR f PRO $\mathcal{M}$ A Z DEFINICE $\mathcal{M}$ JE f PÁROVÁNÍ V $G = G_{\mathcal{M}}$ VELIKOSTI $|A|$ ⊠

$E \neq \emptyset \Rightarrow k_1, k_2 \geq 1$

– LATINSKÝ OBDÉLNÍK TYPU $k \times m$ PRO $k \leq m$ JE TABULKA S k ŘÁDKY A m SLOUPCI VYPLNĚNÁ SYMBOLY $1, \dots, m$ TAK, ŽE SE V ŽÁDNÉM ŘÁDKU ANI SLOUPCI ŽÁDNÝ SYMBOL NEOPAKUJE

1	2	3	4	5	6
3	1	4	6	2	5
4	3	6	5	1	2

– VĚTA 7.4: KAŽDÝ LATINSKÝ OBDÉLNÍK TYPU $k \times m$ LZE DOPLNIT NA LATINSKÝ ČTVEREC ŘÁDU m

– DK:

– MĚJME LATINSKÝ OBDÉLNÍK O TYPU $k \times m$, BÚNO $k < m$

– ROZŠÍŘÍME O NA $k+1$ ŘÁDKŮ

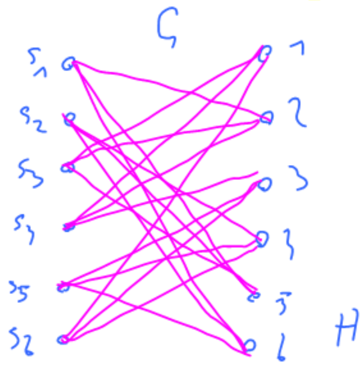
– UVAŽME BIPARTITNÍ GRAF $G = (S \cup H, E)$, KDE $S = \{S_1, \dots, S_m\}$ JE MNOŽINA SLOUPCŮ O, $H = \{1, \dots, m\}$ JE MNOŽINA HODNOT, ZE KTERÝCH BUDEME VYTVÁŘET $(k+1)$-NÍ ŘÁDEK A $E = \{\{S_i, x\} : x \notin S_i\}$

x NENÍ VE SLOUPCI S_i

PŘÍKLAD:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
1	2	3	4	5	6
3	1	4	6	2	5
4	3	6	5	1	2

$m = 6$, $k = 3$



– PRO KAŽDÉ $s_i \in S$ PLATÍ $\deg_G(s_i) = m-k$, PROTOŽE VE SLOUPCI s_i NENÍ POUŽITO PRÁVĚ $m-k$ HODNOT Z H

– PRO KAŽDÉ $x \in H$ PLATÍ, ŽE $\deg_G(x) = m-k$, PROTOŽE x SE VYSKYTUJE V KAŽDÉM Z k ŘÁDKŮ PRÁVĚ JEDNOU A POKAŽDÉ V JINÉM SLOUPCI A TEDY x CHYBÍ V PRÁVĚ $m-k$ SLOUPCÍCH OBDÉLNÍKU O

– JSOU SPLNĚNY PŘEDPOKLADY DŮSLEDKU 7.3, PODLE KTERÉHO V G EXISTUJE PÁROVÁNÍ VELIKOSTI $|S| = m$

  – TOTO PÁROVÁNÍ DÁVÁ $(k+1)$-NÍ ŘÁDEK ROZŠIŘUJÍCÍ O NA LATINSKÝ OBDÉLNÍK TYPU $(k+1) \times m$ $\boxtimes$