EXISTENCE KONEČNÝCH PROJEKTIVNÍCH ROVIN:

- **VĚTA 3.1:** Pokud existuje algebraické těleso o m prvcích, potom existuje konečná projektivní rovina řádu m

  existují $\Leftrightarrow$ m je mocnina prvočísla a jsou určeny jednoznačně až na izomorfismus

- konstrukce funguje nad každým tělesem a například nad $\mathbb{R}$ dává **reálnou projektivní rovinu**

- <u>DK:</u>
  - Mějme těleso $\mathbb{K}$ (velikosti m), zavedeme na $\mathbb{K}^3$ ekvivalenci $\sim$ předpisem $(x,y,z) \sim (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ pro každé $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ a $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
  - **Body** projektivní roviny = třídy ekvivalence $\sim$ na $\mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$
    - počet bodů $= \dfrac{m^3-1}{m-1} = \underline{\underline{m^2+m+1}}$

      m^3-1 = velikost $\mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, protože $|\mathbb{K}| = m$

      $m-1$ = velikost každé třídy v $\sim$, protože $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ a $|\mathbb{K}\setminus\{0\}| = m-1$

  - **Přímky** projektivní roviny:
    - pro každé $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ definujeme přímku $P_{a,b,c} = \{[(x,y,z)]_\sim : (x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\},\ ax+by+cz=0\}$

      $P_{a,b,c}$ je množina tříd ekvivalence $\sim$

    - platí, že $(a,b,c) \sim (a',b',c') \Leftrightarrow P_{a,b,c} = P_{a',b',c'}$

      $\Rightarrow$ máme m^2+m+1 přímek

  - ověříme axiomy (A1), (A2), (A3)
  - **(A1):**
    - mějme dva různé body (x,y,z) a (x',y',z')
    - potom $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} = 2$

      protože $(x,y,z) \nsim (x',y',z')$

      - přímka obsahující (x,y,z) a (x',y',z') odpovídá jádru této matice
    - jádro má dimenzi 1 $\Rightarrow$ existence (dim > 0) a jednoznačnost (dim < 2) přímky
  - **(A2):**
    - dvě různé přímky $P_{a,b,c}$ a $P_{a',b',c'}$ určují jednoznačně bod v jejich průniku
    - analogicky z matice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$
  - **(A3):**
    - stačí zvolit $C := \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$
    - každá trojice bodů z C je pak lineárně nezávislá a tedy body z C jsou v obecné poloze

$\boxtimes$

– **LATINSKÝ ČTVEREC** ŘÁDU $m \in \mathbb{N}$ JE TABULKA $m \times m$ ČÍSEL Z $\{1,\dots,m\}$, VE KTERÉ SE ŽÁDNÉ ČÍSLO NEOPAKUJE V ŽÁDNÉM ŘÁDKU ANI SLOUPCI

– DŘÍVE SE LATINSKÉ ČTVERCE VYPLŇOVALY PÍSMENY LATINKY, PROTO SE JIM ŘÍKÁ LATINSKÉ

– LATINSKÉ ČTVERCE L, L' STEJNÉHO ŘÁDU JSOU **ORTOGONÁLNÍ**, POKUD PRO KAŽDÉ $l, l' \in \{1,\dots,m\}$ EXISTUJÍ $i, j \in \{1,\dots,m\}$ TAKOVÉ, ŽE $L_{ij} = l$, $L'_{ij} = l'$

– ZAPISUJEME $L \perp L'$

– MOTIVACE POCHÁZÍ OD L. EULERA A JEHO „PROBLÉMU 36 DŮSTOJNÍKŮ": USPOŘÁDAT LZE 6 PLUKŮ, KDE KAŽDÝ PLUK SESTÁVÁ Z 6 ČLENŮ RŮZNÝCH HODNOSTÍ, DO ČTVERCE 6×6 TAK, ABY V ŽÁDNÉM SLOUPCI ANI ŘÁDKU NEBYLI ČLENOVÉ STEJNÉ HODNOSTI ČI ZE STEJNÉHO PLUKU? – NEBOLI $\exists$ 2 ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE ŘÁDU 6?

– PŘÍKLAD:

L

1	2	3
2	3	1
3	1	2

L'

1	2	3
3	1	2
2	3	1

$\longrightarrow L \perp L'$

1, 1	2, 2	3, 3
2, 3	3, 1	1, 2
3, 2	1, 3	2, 1

DVA ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE ŘÁDU 3, KAŽDÝ Z $3^2 = 9$ PÁRŮ $(l, l') \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ SE VYSKYTUJE NA NĚJAKÉ POZICI (i,j) V $L \perp L'$

– **POZOROVÁNÍ 5.2:** PRO ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE L, L' ŘÁDU m A PÁR $(l, l') \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,m\}$ JE POZICE (i,j) S $L_{ij} = l$, $L'_{ij} = l'$ URČENA JEDNOZNAČNĚ. $\boxtimes$

– DK: POČET PÁRŮ (l, l') JE m^2, STEJNĚ JAKO POČET PÁRŮ (i,j)

– **POZOROVÁNÍ 5.3:** JE-LI $L = (L_{ij})_{i,j=1}^{m}$ LATINSKÝ ČTVEREC A $\pi : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,m\}$ PERMUTACE, TAK POTOM $\pi(L) := (\pi(L_{ij}))_{i,j=1}^{m}$ JE LATINSKÝ ČTVEREC STEJNÉHO ŘÁDU. $\boxtimes$

$\Rightarrow$ BÚNO PRVNÍ ŘÁDEK JE VŽDY $1, 2, \dots, m$

$\Rightarrow$ JE-LI $L \perp L'$, PAK $\pi(L) \perp L'$

– **DŮSLEDEK 5.4:** POČET **NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍCH** (TEDY PO DVOU ORTOGONÁLNÍCH) ČTVERCŮ ŘÁDU $m \in \mathbb{N}$ JE NANEJVÝŠ $m - 1$.

– DK:

– BÚNO $L_1, \dots, L_m$ NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE ŘÁDU m

– BÚNO PRVNÍ ŘÁDKY JSOU $1, 2, \dots, m$ (PODLE POZOROVÁNÍ 5.3)

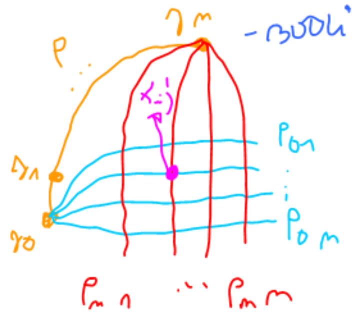
– NA POZICI $(2,1)$ MOHOU BÝT JEN ČÍSLA $2, 3, \dots, m$ A KAŽDÉ Z NICH JE V NANEJVÝŠ JEDNOM ČTVERCI L_k

↳ PODLE POZOROVÁNÍ 5.2, PROTOŽE KAŽDÝ PÁR (l, l) JE NA POZICI $(1, l)$ $\boxtimes$

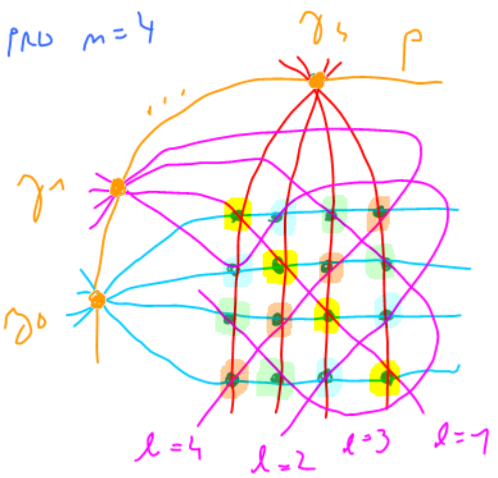
$\bullet \neq 1$

$\Rightarrow m \leq m - 1$

- NYNÍ DÁME DO SOUVISLOSTI ORTOGONÁLNÍ ČTVERCE A KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY
- **VĚTA 5.5**:
  KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU $m \geq 2$ EXISTUJE $\iff$ EXISTUJE $m-1$ NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍCH LATINSKÝCH ČTVERCŮ ŘÁDU m
  - DŮK:
    - $(\Rightarrow)$:
      - DÁNA KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA $(X, \mathcal{P})$ ŘÁDU $m \geq 2$
      - CHCEME SESTROJIT NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE $L_1, \dots, L_{m-1}$ ŘÁDU m
      - UVAŽME LIBOVOLNOU PŘÍMKU $P = \{y_0, \dots, y_m\} \in \mathcal{P}$
      - KAŽDÝM BODEM y_i PROCHÁZÍ m DALŠÍCH PŘÍMEK $P_{i1}, \dots, P_{im}$
      - PRO KAŽDÉ $i, j \in \{1, \dots, m\}$ OZNAČME JAKO x_{ij} PRŮNIK P_{0i} A P_{mj}
      - BODŮ x_{ij} JE m^2, BODŮ $y_0, \dots, y_m$ JE $m+1$ $\Rightarrow$ MÁME VŠECH m^2+m+1 BODŮ Z X
        - PŘÍMKY OBSAHUJÍCÍ BODY y_0 A y_m SLOUŽÍ K „URČENÍ SOUŘADNIC“
        - PŘÍMKY OBSAHUJÍCÍ BODY $y_1, \dots, y_{m-1}$ BUDOU ODPOVÍDAT LATINSKÝM ČTVERCŮM $L_1, \dots, L_{m-1}$



- PRO $k \in \{1, \dots, m-1\}$ A $l \in \{1, \dots, m\}$ SE PŘÍMKA $P_{k,l}$ MUSÍ PROPLÉST MŘÍŽKOU $m \times m$ URČENOU PŘÍMKAMI Z y_0 A y_m – TOUTO PROPLÉTÁNÍM URČÍ POZICE PRVKU l VE ČTVERCI L_k
- FORMÁLNĚ – NASTAVÍME $(L_k)_{ij} = l \iff x_{ij} \in P_{kl}$ PRO $\forall i = 1, \dots, m$, $\forall j = 1, \dots, m$
- PŘÍKLAD:
  - PRO $m = 4$



L_1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

- UKÁŽEME, ŽE $L_1, \dots, L_{m-1}$ JSOU NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE ŘÁDU m
- NĚJME $k \in \{1, \dots, m-1\}$, NA KAŽDÉ POZICI (i, j) JE V L_k ČÍSLO $l \in \{1, \dots, m\}$, PODLE (A1)
- V ŘÁDCÍCH L_k SE NIC NEOPAKUJE (TEDY $(L_k)_{ij} \neq (L_k)_{ij'}$ PRO $\forall i = 1, \dots, m$; $\forall j = 1, \dots, m$, $\forall j' = 1, \dots, m$, $j \neq j'$)
  - SPOREM – $\exists i, j, j' \in \{1, \dots, m\}$, $j \neq j'$: $(L_k)_{ij} = (L_k)_{ij'} = l$
  - POTOM $|P_{kl} \cap P_{0i}| \geq 2 \Rightarrow$ SPOR S (A2)
- ANALOGICKY SE NIC NEOPAKUJE VE SLOUPCÍCH L_k
  - KDYBY $\exists i, i', j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq i'$: $(L_k)_{ij} = (L_k)_{i'j} = l$, PAK $|P_{kl} \cap P_{mj}| \geq 2$ ← NELZE PODLE (A2)
- PRO $k, k' \in \{1, \dots, m-1\}$ S $k \neq k'$ UKÁŽEME, ŽE $L_k \perp L_{k'}$:
  - CHCEME $\forall l, l' \in \{1, \dots, m\}$ $\exists i, j \in \{1, \dots, m\}$: $(L_k)_{ij} = l$ & $(L_{k'})_{ij} = l'$
  - PŘÍMKY P_{kl} A $P_{k'l'}$ SE PODLE (A2) PROTÍNAJÍ V NĚJAKÉM BODĚ X_{ij}
  - Z KONSTRUKCE PAK PLATÍ $(L_k)_{ij} = l$ & $(L_{k'})_{ij} = l'$ A TEDY $L_k \perp L_{k'}$

(a) $\Leftarrow$:
- NĚJME NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍ LATINSKÉ ČTVERCE $L_1, \dots, L_{m-1}$ ŘÁDU $m \geq 2$
- NĚJME NAVZÁJEM ORTOGONÁLNÍ PROJEKTIVNÍ ROVINU (X, P) ŘÁDU m
- ZKONSTRUUJEME KONEČNOU PROJEKTIVNÍ ROVINU
- ZVOLME $X = \{y_0, \dots, y_m\} \cup \{X_{ij} : i, j = 1, \dots, m\}$
- DO MNOŽINY P PŘIDEJME PŘÍMKY $P = \{y_0, \dots, y_m\}$, $P_{0i} = \{y_0, X_{i1}, \dots, X_{im}\}$, $P_{mj} = \{y_m, X_{1j}, \dots, X_{mj}\}$, $P_{kl} = \{y_k\} \cup \{X_{ij} : (L_k)_{ij} = l\}$ PRO $k = 1, \dots, m-1$, $i, j, l = 1, \dots, m$
- POTOM (X, P) JE KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU m:
  - STAČÍ OVĚŘIT AXIOMY (A1), (A2), (A3)

- (A3) ($\exists$ 4 BODY V OBECNÉ POLOZE):
  - STAČÍ VZÍT $C = \{y_0, y_m, X_{11}, X_{22}\}$ → EXISTUJE, PROTOŽE $m \geq 2$ $\Rightarrow$ (A3) PLATÍ

- (A2) (KAŽDÉ 2 PŘÍMKY SE PROTÍNAJÍ V ≤ 1 BODĚ):
  - OVĚŘIT ROZBOREM PŘÍPADŮ
  - MÁME NEVLASTNÍ PŘÍMKU P, VODOROVNÉ P_{0i}, SVISLÉ P_{mj} A ŠIKMÉ P_{kl}, $k = 1, \dots, m-1$, $l = 1, \dots, m$
  - a) NEVLASTNÍ PŘÍMKA (A2) SPLŇUJE Z DEFINICE
  - b) VODOROVNÁ $\cap$ VODOROVNÁ $= \{y_0\}$, SVISLÁ $\cap$ SVISLÁ $= \{y_m\}$
  - c) VODOROVNÁ $P_{0i} \cap$ SVISLÁ $P_{mj} = \{X_{ij}\}$
  - d) $|$VODOROVNÁ $P_{0i} \cap$ ŠIKMÁ $P_{kl}| = |\{X_{ij} : (L_k)_{ij} = l\}| = 1$ ← NA ŘÁDKU i MÁ L_k PRVEK l JEDNOU
  - e) $|$SVISLÁ $P_{mj} \cap$ ŠIKMÁ $P_{kl}| = |\{X_{ij} : (L_k)_{ij} = l\}| = 1$ ← VE SLOUPCI j MÁ L_k PRVEK l JEDNOU

- 1) šikmá $P_{k\ell}$ $\cap$ šikmá $P_{k'\ell'}$:
  - pokud $k = k'$, pak $P_{k\ell} \cap P_{k\ell'} = \{\gamma_k\}$
  - jinak $|P_{k\ell} \cap P_{k'\ell'}| = |\{ x_{ij} : (L_k)_{ij} = \ell \ \& \ (L_{k'})_{ij} = \ell' \}| = 1$

protože $L_k \perp L_{k'}$

$\Rightarrow$ (A2) platí

- (A1) (každé 2 body určují přímku):
  - máme m^2+m+1 bodů a m^2+m+1 přímek
  - spočítejme 2 způsoby počet $z := |\{(\{a,b\}, P) : \begin{smallmatrix} a,b \in X, a \neq b \\ P \in \mathcal{P}, a,b \in P \end{smallmatrix} \}|$
  - $z = (m^2+m+1)\binom{m+1}{2}$, protože $\forall P \in \mathcal{P}$ přispěje $\binom{m+1}{2}$ páry $\{a,b\}$
  - na druhou stranu každými 2 body prochází podle (A2) ≤ 1 přímka a tedy $\binom{m^2+m+1}{2} \geq z$
  - protože $\binom{m^2+m+1}{2} = \binom{m+1}{2}(m^2+m+1)$, tak musí procházet právě 1 přímka každými dvěma body z X $\Rightarrow$ (A1) platí $\boxtimes$

- $\nexists$ konečná projektivní rovina řádu 6, protože $\nexists$ 5 navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu 6
  - $\nexists$ dokonce ani 2 takové čtverce (Tarry, 1900)
  - $\nexists$ dokonce ani 2 takové čtverce (Tarry, 1900)
  - $\Rightarrow$ záporná odpověď na Eulerův problém 36 důstojníků