VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE A JEJICH APLIKACE:

- PŘIPOMENUTÍ Z MINULA:
  - CHCEME URČIT POČTY $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ NĚJAKÉHO KOMBINATORICKÉHO OBJEKTU
  - PŘIŘADÍME DANÉMU OBJEKTU **VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCI** $a(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$
  - KOEFICIENTY a_n LZE NĚKDY URČIT APLIKOVÁNÍM ZÁKLADNÍCH OPERACÍ (SOUČET, α-NÁSOBEK, NÁSOBENÍ, ...) NA ZÁKLADNÍ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE $(1+x)^n$ PRO $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots\right)$

    ($\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ PRO $(\underbrace{1,\dots,1}_{n+1},0,0,\dots)$, $\frac{1}{1-x}$ PRO $(1,1,\dots)$ A $(1+x)^n$ PRO $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots\right)$

  - VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE LZE POUŽÍT K **ŘEŠENÍ REKURENCÍ** TYPU $a_{n+k} = \alpha_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 a_n$ PRO $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

ROZŠÍŘÍME SI REPERTOÁR ZÁKLADNÍCH VYTVOŘUJÍCÍCH FUNKCÍ

- ROZŠÍŘÍME SI (ZOBECNĚNÝ) BINOMICKÝ KOEFICIENT JAKO
- PRO $n \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}_0$ DEFINUJME

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \qquad \left(\text{SPECIÁLNĚ } \binom{n}{0} := 1\right)$$

- ODVOZEN I. NEWTONEM, KDYŽ ODJEL Z CAMBRIDGE NA RODINNÉ PANSTVÍ KVŮLI MORU

VĚTA 3.7 (**ZOBECNĚNÁ BINOMICKÁ VĚTA**): $\forall n \in \mathbb{R}$ JE $(1+x)^n$ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCÍ POSLOUPNOSTI $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots\right)$ A ŘADA $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$ KONVERGUJE PRO $\forall x \in (-1,1)$.

- DK (NÁČRT):
  - MATEMATICKÁ ANALÝZA: FUNKCE f JE ROVNA SVÉMU TAYLOROVU ROZVOJI NA OKOLÍ BODU a, NEBOLI

PRO X NA OKOLÍ a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i,$$

POKUD $\exists$ VŠECHNY DERIVACE, SOUČET ŘADY KONVERGUJE A ZBYTKY JDOU K NULE

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{PRO } \xi \in (a,x)$$

  - APLIKUJME NA $f(x) = (1+x)^n$ A $a = 0$ (DERIVACE EXISTUJÍ)

$f(x) = (1+x)^n$

$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$

$\vdots$

$f^{(i)}(x) = n(n-1)\cdots(n-i+1)(1+x)^{n-i}$

$f(0) = (1+0)^n = 1$

$f'(0) = n(1+0)^{n-1} = n$

$f''(0) = n(n-1)(1+0)^{n-2} = n(n-1)$

$\vdots$

$f^{(i)}(0) = n(n-1)\cdots(n-i+1)$

PRO $x \in (-1,1)$

$$\Rightarrow (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}(x-0) + \frac{n(n-1)}{2!}(x-0)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i \quad \text{PRO } x \in (-1,1)$$

- KONVERGENCI LZE OVĚŘIT **PODÍLOVÝM KRITÉRIEM**:

$$\left| \binom{n}{i} x^i \Big/ \left(\binom{n}{i-1} x^{i-1} \right) \right| = \left| \frac{(n-i+1)x}{i} \right| \xrightarrow{i \to \infty} |x| < 1$$

ZBYTKY: $\left| \binom{n}{i} \right| \cdot (1+\xi)^{n-i} x^i \xrightarrow{i \to \infty} 0$ PRO $\xi \in (0,x)$, $x < 1$

$\boxtimes$

- **DŮSLEDEK 3.2:**

$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall x \in (-1,1)$ PLATÍ $\dfrac{1}{(1-x)^m} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{m-1} x^i$.

- DK:

$$(1-x)^{-m} \overset{\text{VĚTA 3.1}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-m}{i} (-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-i+1)}{i!} \cdot (-x)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m(m+1)\cdots(m+i-1)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{i} x^i =$$

VYTKNUTÍ MINUS JEDNIČEK

$$\binom{m+i-1}{i} = \binom{m+i-1}{m-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i-1}{m-1} x^i$$

$\boxtimes$

- DK 2 (KOMBINATORICKÝ):

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \underbrace{(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)\cdots(1+x+x^2+\dots)}_{m} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

PRO $x \in (-1,1)$

- a_i := POČET ROZKLADŮ ČÍSLA i NA m NEZÁPORNÝCH SČÍTANCŮ
  ↳ Z k-TÉ ZÁVORKY VYBÍRÁME ČLEN S EXPONENTEM ODPOVÍDAJÍCÍM k-TÉMU SČÍTANCI V ROZKLADU i

NAPŘÍKLAD: $m = 3$, $i = 5$

$$\overbrace{x\ x\ x\ x\ x\ x\ x}^{m+i-1}$$

$$o \mid o\ o\ o \mid o \qquad 5 = 1 + 3 + 1$$

$\Rightarrow a_i = \binom{m+i-1}{m-1}$

↳ MÁME $m+i-1$ OBJEKTŮ, $m-1$ Z NICH VYBEREME A PROHLÁSÍME ZA HRADLA |, ZBYLÝCH i OBJEKTŮ TVOŘÍ KULIČKY o A POČET KULIČEK MEZI HRADLY URČUJE VELIKOST PŘÍSLUŠNÉHO SČÍTANCE V ROZKLADU

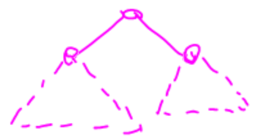
$\boxtimes$

- PŘÍKLAD:
  - PRO $m = 3$:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} x + \binom{4}{2} x^2 + \dots + \binom{i+2}{2} x^i + \dots$$

APLIKACE – POČÍTÁNÍ BINÁRNÍCH ZAKOŘENĚNÝCH STROMŮ:

– ZAKOŘENĚNÝ BINÁRNÍ STROM – BUĎ JE PRÁZDNÝ, NEBO OBSAHUJE SPECIÁLNÍ VRCHOL ZVANÝ KOŘEN A PÁR ZAKOŘENĚNÝCH BINÁRNÍCH STROMŮ, KTERÉ TVOŘÍ LEVÝ A PRAVÝ PODSTROM



– PŘÍKLADY:

– b_n = POČET BINÁRNÍCH ZAKOŘENĚNÝCH STROMŮ NA $n \in \mathbb{N}_0$ VRCHOLECH

$\Rightarrow b_0=1,\ b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=5,\ b_4=14,\ \dots$

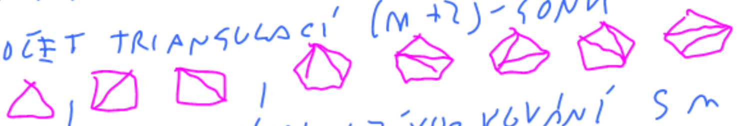
– NECHŤ $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ JE PŘÍSLUŠNÁ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE

– **VĚTA 3.3:** PRO KAŽDÉ $n \in \mathbb{N}_0$ PLATÍ $b_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}_{= C_n}$.

C_n = n-TÉ CATALANOVO ČÍSLO

– CATALANOVA ČÍSLA MAJÍ MNOHO INTERPRETACÍ, NAPŘÍKLAD:

C_n = POČET TRIANGULACÍ $(n+2)$-ÚHLU

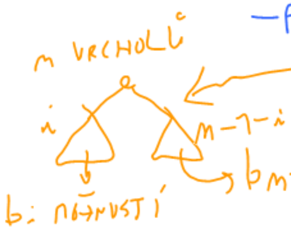


= POČET SPRÁVNÝCH UZÁVORKOVÁNÍ S n PÁRY ZÁVOREK

(), ()() (()), ()()() ()(()) (()()) (())() ((())), …

– DŮK VĚTY 3.3:

– PRO $\forall n \geq 1$ PLATÍ $b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \dots + b_{n-1} b_0$ (*)



– PODLE OPERACE NÁSOBENÍ VYTVOŘUJÍCÍCH FUNKCÍ JE PRAVÁ STRANA (*) ROVNA KOEFICIENTU U x^{n-1} V $b(x)\cdot b(x)$

– ZÁPIS TABULKOU:

KOEFICIENT U x^n V $b^2(x)$ JE $\sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i}$ PODLE OPERACE NÁSOBENÍ

POSUN DOPRAVA ← $x\cdot b(x)\cdot b(x)$

PŘIČTENÍ $b_0=1$ ← $1+x\cdot b(x)\cdot b(x)$

$b(x)$	$b_0=1$	$b_1=1$	$b_2=2$	…
$b(x)\cdot b(x)$	$\underbrace{b_0^2}_{=b_1}$	$\underbrace{b_0b_1+b_1b_0}_{=b_2}$	$\underbrace{b_0b_2+b_1^2+b_2b_0}_{=b_3}$ PODLE (*)	…
$x\cdot b(x)\cdot b(x)$	0	b_1	b_2	…
$1+x\cdot b(x)\cdot b(x)$	$1=b_0$	b_1	b_2	…

$$\Rightarrow b(x) = 1 + x \cdot b(x) \cdot b(x)$$

– ŘEŠÍME JAKO KVADRATICKOU ROVNICI S PROMĚNNOU $b(x)$ (A PARAMETREM x)

$$\Rightarrow b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

– SPRÁVNÁ VOLBA JE $\underline{\underline{b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}}}$, PROTOŽE $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$,

ALE $\lim\limits_{x \to 0+} b(x) = b_0 = 1 \neq \infty$

$\Rightarrow$ ZNÁME VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCI $b(x)$ A ZBÝVÁ URČIT KOEFICIENTY b_m

– PODLE ZOBECNĚNÉ BINOMICKÉ VĚTY (VĚTA 3.1) PLATÍ

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-4)^m \cdot \binom{1/2}{m} \cdot x^m$$

– TEDY

$$b(x) = \frac{1 - \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-4)^m \cdot \binom{1/2}{m} \cdot x^m}{2x} = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot (-4)^m \binom{1/2}{m}}_{=b_{m-1}} x^{m-1}$$

ČLEN SUMY PRO $m=0$ SE VYRUŠÍ S 1, VYDĚLÍME x

$$\Rightarrow b_m = -\frac{1}{2}(-4)^{m+1}\binom{1/2}{m+1} = \underbrace{-\frac{1}{2}(-4)^{m+1}}_{(m+2)\text{-KRÁT MÍNUS}} \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-m\right)}{(m+1)!}}_{m\text{-KRÁT MÍNUS}} =$$

$$= (-1)^{m+2} \cdot 2^{2m+1} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^m \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{(2m-1)}{2}}{(m+1)!}}_{\text{V ČITATELI DĚLÍME ČÍSLEM } 2^{m+1}} =$$

MÍNUSY ZMIZÍ, PROTOŽE $(-1)^{2m+2} = 1$

$$= 2^m \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{(m+1)!} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2m)}{2 \cdot 4 \cdots (2m)} = 2^m \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \frac{(2m)!}{(m+1)!\, m!} =$$

$$= \frac{1}{m+1} \cdot \binom{2m}{m} = \underline{\underline{C_m}} \qquad \boxtimes$$

$(m+1)! = (m+1) \cdot m!$

ROZKLADY ČÍSEL NA SČÍTANCE:

- VÍME:
  - $\forall m \in \mathbb{N}$ LZE ROZLOŽIT NA $k \in \mathbb{N}$ KLADNÝCH USPOŘÁDANÝCH SČÍTANCŮ $\binom{m-1}{k-1}$ ZPŮSOBY (UMÍSTÍME $k-1$ HRADEL NA $m-1$ POZIC)
  - NAPŘÍKLAD PRO $m=4$ A $k=2$ MÁME $= 3+1 = 2+2 = 1+3$

$\circ\circ\circ|\circ \quad \circ\circ|\circ\circ \quad \circ|\circ\circ\circ$

$\Rightarrow$ POČET c_m USPOŘÁDANÝCH ROZKLADŮ NA m KLADNÉ SČÍTANCE JE ROVEN

$$c_m = \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} = 2^{m-1} \Rightarrow c(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \frac{1-x}{1-2x}$$

BINOMICKÁ VĚTA

ZÁKLADNÍ OPERACE

OPERACE DO SOUČTENÍ $2x$ DO $\frac{1}{1-x}$, POSUN DOPRAVA A PŘIČTENÍ $c_0 = 1$

- JAK JE TO S NEUSPOŘÁDANÝMI ROZKLADY?
- p_m = POČET NEUSPOŘÁDANÝCH ROZKLADŮ m NA KLADNÉ SČÍTANCE
  - PŘÍKLADY:

$p_0 = 1$

$p_1 = 1 \qquad 1$

$p_2 = 2 \qquad 2 = 1+1$

$p_3 = 3 \qquad 3 = 2+1 = 1+1+1$

$p_4 = 5 \qquad 4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$

$p_5 = 7 \qquad 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 =$
$= 1+1+1+1+1$

JE ZNÁM PŘESNÝ A VELMI KOMPLIKOVANÝ VZOREC (HARDY-RAMANUJAN-RADEMACHER)

- URČENÍ p_m JE MNOHEM TĚŽŠÍ PROBLÉM NEŽ URČENÍ c_m
- OBECNĚ NENÍ ZNÁM „SNADNÝ" VZOREC PRO p_m
- PŘESTO ZNÁME VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCI $p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m$
- $p(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)\dots =$

ZÁPIS $m = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \dots$ ZACHYCUJE ČLEN $x^{k_i \cdot i}$ VYBRANÝ Z i-TÉ ZÁVORKY

$k_i \in \{0,1,2,\dots\}$ JE POČET VÝSKYTŮ ČÍSLA i V ROZKLADU ČÍSLA m

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

- ANALYTICKÝMI METODAMI PAK LZE ZJISTIT ASPOŇ ODHAD

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$