ÚVOD DO RAMSEYOVY TEORIE:

- Z MINULA ZNÁME RAMSEYOVU VĚTU PRO GRAFY A DVĚ BARVY
  BARVÍME DVOJICE VRCHOLŮ
- NYNÍ JI ROZŠÍŘÍME NA VÍCE BAREV A TAKÉ NA BARVENÍ p-TIC VRCHOLŮ
- PRO ČÍSLA p, n, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ DEFINUJEME **RAMSEYOVO ČÍSLO**
  VELIKOST BARVENÝCH MNOŽIN — POČET BAREV — VELIKOSTI 1-BAREVNÝCH PODSTRUKTUR, KTERÉ CHCEME NAJÍT

$R_p(m_1, \dots, m_n)$ JAKO NEJMENŠÍ $N \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE PRO KAŽDOU MNOŽINU X S $|X| \geq N$ A KAŽDÉ n-OBARVENÍ MNOŽINY $\binom{X}{p}$ EXISTUJE $i \in \{1, \dots, n\}$ A $Y \subseteq X$ TAKOVÉ, ŽE $|Y| = m_i$ A VŠECHNY p-TICE Z $\binom{Y}{p}$ MAJÍ i-TOU BARVU

- **VĚTA 11.1 (RAMSEYOVA VĚTA PRO p-TICE**, 1930):
  PRO KAŽDÉ $p, n, m_1, \dots, m_n$ JE $R_p(m_1, \dots, m_n)$ KONEČNÉ.

DK:
- ZOBECNÍME MYŠLENKU DŮKAZU RAMSEYOVY VĚTY PRO GRAFY A 2 BARVY
- MĚJME X, $|X| \geq N$ PRO VELKÉ N A n-OBARVENÍ χ MNOŽINY $\binom{X}{p}$
- POUŽIJEME INDUKCI PODLE p A $m_1 + \dots + m_n$
  URČÍME POZDĚJI
- ZAČÁTEK INDUKCE:
  - PRO $p = 1$ SE JEDNÁ O DIRICHLETŮV PRINCIP (VĚTA 10.2)
  - POKUD JE NĚJAKÉ $m_i = 1$ A $p \geq 2$, PAK $R_p(m_1, \dots, m_n) = 1$
    STAČÍ JEDEN VRCHOL
- INDUKČNÍ KROK:
  - NECHŤ JSOU $p \geq 2$ A $m_1, \dots, m_n \geq 2$
  - PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE VĚTA PLATÍ PRO $p-1$ A KAŽDÉ $m_1', \dots, m_n'$ A PRO p A KAŽDÉ $m_1'', \dots, m_n''$, KDE $m_1'' + \dots + m_n'' < m_1 + \dots + m_n$
  - ZVOLME $v \in X$ A OBARVĚME KAŽDÉ $P \in \binom{X \setminus \{v\}}{p-1}$ BARVOU $\chi(P \cup \{v\})$, DEFINUJME $m_i' = R_p(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_n)$
  - JE-LI $N \geq 1 + R_{p-1}(m_1', \dots, m_n')$, PAK Z IP PRO $p-1, m_1', \dots, m_n'$ APLIKOVANÉHO NA $\binom{X \setminus \{v\}}{p-1}$ MÁME $j \in \{1, \dots, n\}$ A $X' \subseteq X \setminus \{v\}$ TAKOVÉ, ŽE $|X'| = m_j'$ A VŠECHNY p-TICE $P \cup \{v\}$ S $P \in \binom{X'}{p-1}$ MAJÍ j-TOU BARVU V χ

- UVAŽME $\binom{X'}{p}$, KTERÉ JE OBARVENÉ n-OBARVENÍM χ
- Z VOLBY m_j MÁME PODLE IP PRO $p, m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_n$ $i \in \{1, \dots, n\}$ A $Y \subseteq X'$ TAKOVÉ, ŽE VŠECHNY p-TICE V $\binom{Y}{p}$ MAJÍ i-TOU BARVU A $|Y| = m_i$, POKUD $i \neq j$, A $|Y| = m_i - 1$, POKUD $i = j$

  ↳ PAK JSME HOTOVI

- POKUD $i = j$, PAK MNOŽINA $Y \cup \{v\}$ MÁ VŠECHNY p-TICE i-TÉ BARVY A $|Y \cup \{v\}| = m_i$

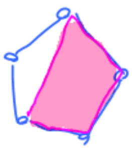
  ↳ OPĚT JSME HOTOVI

- STAČÍ TEDY ZVOLIT $N \geq 1 + R_{p-1}(m_1, \dots, m_n)$

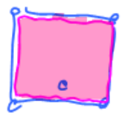
☒

- APLIKACE – ERDŐSOVA – SZEKERESOVA VĚTA:
  - JEDNA Z PRVNÍCH APLIKACÍ RAMSEYOVY VĚTY
  - P = KONEČNÁ MNOŽINA BODŮ V ROVINĚ $\mathbb{R}^2$
    - P JE V OBECNÉ POLOZE, POKUD NEOBSAHUJE 3 BODY NA PŘÍMCE
    - P JE V KONVEXNÍ POLOZE, POKUD TVOŘÍ MNOŽINU VRCHOLŮ KONVEXNÍHO MNOHOÚHELNÍKU
  - LEMMA 11.2: KAŽDÁ MNOŽINA 5 BODŮ V $\mathbb{R}^2$ V OBECNÉ POLOZE OBSAHUJE 4 BODY V KONVEXNÍ POLOZE
  - DK: – 3 (KOMBINATORICKY ODLIŠNÉ) PŘÍPADY:

    a) 5 BODŮ NA HRANICI :



    b) 4 BODY NA HRANICI :



    c) 3 BODY NA HRANICI :

PŘÍMKA SKRZ DVA BODY UVNITŘ MÁ 2 BODY Z HRANICE NA TÉŽE STRANĚ A TYTO BODY SPOLU S OBĚMA VNITŘNÍMI JSOU V KONVEXNÍ POLOZE

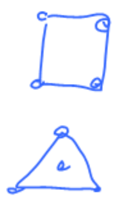
☒

- **VĚTA 11.3** (ERDŐSOVA-SZEKERESOVA VĚTA, 1935):
  PRO KAŽDÉ $k \in \mathbb{N}$ EXISTUJE NEJMENŠÍ $ES(k) \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE KAŽDÁ KONEČNÁ MNOŽINA S $\geq ES(k)$ BODY V $\mathbb{R}^2$ V OBECNÉ POLOZE OBSAHUJE k BODŮ V KONVEXNÍ POLOZE.

$|P| \geq ES(6)$

6 BODŮ V KONVEXNÍ POLOZE

- DK:
  - UKÁŽEME, ŽE $ES(k) \leq R_4(k,5)$
  - MĚJME KONEČNOU MNOŽINU BODŮ P V $\mathbb{R}^2$ V OBECNÉ POLOZE S $|P| \geq R_4(k,5)$
  - OBARVĚME KAŽDOU ČTVEŘICI C BODŮ Z P ČERVENĚ, JE-LI V KONVEXNÍ POLOZE A MODŘE JINAK
    - TEDY $\chi(C) = \{$ ● $C =$; ● $C =$



  - VĚTA 11.1 $\Rightarrow \exists$ a) BUĎ $Q \subseteq P$ S $|Q| = k$ A SE VŠEMI ČTVEŘICEMI ČERVENÝMI V χ
    b) NEBO PĚTICE BODŮ SE VŠEMI ČTVEŘICEMI MODRÝMI V χ
  - b) NENASTANE PODLE LEMMA 11.2, V PŘÍPADĚ a) JE Q V KONVEXNÍ POLOZE A JSME HOTOVI ☒

- TARSY UKÁZAL $ES(k) \leq R_3(k,k)$, DÁ SE RELATIVNĚ SNADNO UKÁZAT
  $ES(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1$

- **ERDŐSOVA-SZEKERESOVA DOMNĚNKA** (1935, 500\$):
  $\forall k \geq 2: ES(k) = 2^{k-2} + 1$
  - PLATÍ PRO $k \leq 6$, NEJLEPŠÍ ZNÁMÝ ODHAD: $ES(k) \leq 2^{k+o(k)}$ (SUK, 2016)
  - ZNÁMO: $ES(k) \geq 2^{k-2} + 1$ PRO KAŽDÉ $k \geq 2$

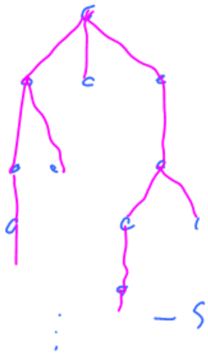
- RAMSEYOVA VĚTA PRO NEKONEČNOU VERZI

- VĚTA 11.4 (NEKONEČNÁ VERZE RAMSEYOVY VĚTY):
  PRO KAŽDÉ $p, n \in \mathbb{N}$ A PRO KAŽDÉ n-OBARVENÍ MNOŽINY $\binom{\mathbb{N}}{p}$ EXISTUJE NEKONEČNÁ $A \subseteq \mathbb{N}$ TAKOVÁ, ŽE VŠECHNY JEJÍ p-TICE MAJÍ V DANÉM n-OBARVENÍ STEJNOU BARVU.

- DK:
  - POSTUPUJEME INDUKCÍ PODLE p
  - ZAČÁTEK INDUKCE:
    - PRO $p=1$ JE TVRZENÍ TRIVIÁLNÍ
  - INDUKČNÍ KROK:
    - MĚJME n-OBARVENÍ $\chi: \binom{\mathbb{N}}{p} \to \{1, \dots, n\}$ BÚNO TOTO JSOU NAŠE BARVY
    - PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE VĚTA PLATÍ PRO $p-1$
    - SESTROJÍME POSLOUPNOST $\mathbb{N} = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ NEKONEČNÝCH MNOŽIN
    - POLOŽME $A_1 = \mathbb{N}$ A PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE MÁME $A_1, \dots, A_i$, $i \geq 1$
    - ZVOLME NEJMENŠÍ PRVEK v_i Z A_i
    - ZVOLME n-OBARVENÍ χ_i, KTERÉ KAŽDÉ $(p-1)$-TICI $Q \in \binom{A_i \setminus \{v_i\}}{p-1}$ PŘIŘADÍ BARVU $\chi_i(Q) = \chi(Q \cup \{v_i\})$
    - POTOM Z IP PRO $p-1$ NA $A_i \setminus \{v_i\}$ EXISTUJE $A_{i+1} \subseteq A_i \setminus \{v_i\}$ TAKOVÉ, ŽE VŠECHNY $(p-1)$-TICE Z $\binom{A_{i+1}}{p-1}$ MAJÍ V χ_i STEJNOU BARVU $b_i \in \{1, \dots, n\}$ A A_{i+1} JE NEKONEČNÁ
    - PAK MÁME POSLOUPNOST $v_1, v_2, \dots$ TAKOVOU, ŽE KAŽDÁ p-TICE $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_p}\}$ S $v_{i_1} < \dots < v_{i_p}$ MÁ V χ BARVU b_{i_1} (TEDY BARVA ZÁVISÍ JEN NA NEJMENŠÍM PRVKU)
    - BUĎ $b \in \{b_1, b_2, \dots\}$ BARVA, KTERÁ SE VYSKYTNE NEKONEČNĚKRÁT A ZVOLME $A = \{v_i : b = b_i\}$
    - POTOM KAŽDÁ p-TICE Z $\binom{A}{p}$ MÁ V χ BARVU b $\boxtimes$

— NEKONEČNÁ VERZE RAMSEYOVY VĚTY IMPLIKUJE KONEČNOU

- DÁ SE UKÁZAT SPOREM, MY SI JI DOKÁŽEME POMOCÍ NÁSLEDUJÍCÍHO VÝSLEDKU
- PRO JEDNODUCHOST JE OMEZÍME NA PŘÍPAD $m_1 = \dots = m_r = m$
- LEMMA 11.5 (KŐNIGOVO LEMMA): V KAŽDÉM ZAKOŘENĚNÉM STROMĚ, KTERÝ MÁ NEKONEČNĚ MNOHO VRCHOLŮ ALE JEN KONEČNÉ STUPNĚ EXISTUJE NEKONEČNÁ CESTA ZAČÍNAJÍCÍ V KOŘENI
  - BEZ DŮKAZU (CVIČENÍ)



- SPOREM — NECHŤ $\exists m$ T.Ž. PRO $\forall M \in \mathbb{N}$ $\exists$ r-OBARVENÍ $\chi_M : \binom{\{1,\dots,M\}}{p} \to \{1,\dots,r\}$ TAKOVÉ, ŽE ŽÁDNÁ MNOŽINA $A \in \binom{\{1,\dots,M\}}{m}$ NENÍ 1-BAREVNÁ $\binom{A}{p}$ V χ_M
- ZKONSTRUUJEME STROM T, KDE M-TÁ ÚROVEŇ JE TVOŘENA OBARVENÍMI χ_M A KDE KOŘEN V NULTÉ ÚROVNI ODPOVÍDÁ $\emptyset$
  - χ_{M+1} JE SYNEM χ_M, POKUD ROZŠIŘUJE χ_M
    - TEDY $\chi_{M+1} \restriction \binom{\{1,\dots,M\}}{p} = \chi_M$

$\Rightarrow$ STROM T MÁ KONEČNÉ STUPNĚ

- LEMMA 11.5 $\Rightarrow$ $\exists$ NEKONEČNÁ VĚTEV V T $\Rightarrow$ r-OBARVENÍ $\chi : \binom{\mathbb{N}}{p} \to \{1,\dots,r\}$ BEZ NEKONEČNÉ $A \subseteq \mathbb{N}$ S JEDNOBAREVNOU $\binom{A}{p}$ $\Rightarrow$ SPOR S VĚTOU 11.4

$\boxtimes$