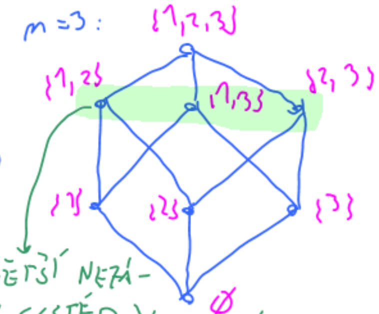
Počítání dvěma způsoby (Spernerova věta):

- ukážeme si ještě jednu aplikaci počítání dvěma způsoby
- systém $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,m\}}$ podmnožin m-prvkové množiny $\{1,\dots,m\}$ je **nezávislý**, pokud platí: $\forall A, B \in \mathcal{M}$, $A \neq B$: $A \not\subseteq B$ & $B \not\subseteq A$
- **Věta 10.1 (Spernerova věta)**: každý nezávislý systém v $2^{\{1,\dots,m\}}$ obsahuje $\leq \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ množin a tento odhad je těsný.
  - ekvivalentně: největší antiřetězec v posetu $(2^{\{1,\dots,m\}}, \subseteq)$ má právě $\binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ prvků



největší nezávislý systém v $2^{\{1,2,3\}}$ má velikost $\binom{3}{\lceil \frac{3}{2} \rceil} = 3$

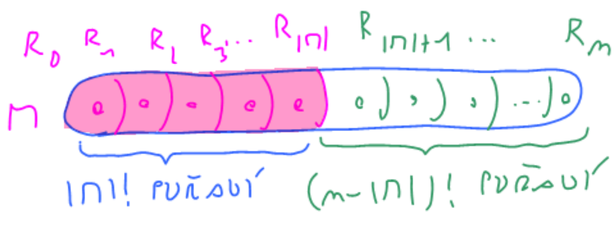
- Dk:
  - 1) existuje nezávislý systém $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,m\}}$ velikosti $\binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$
    - stačí vzít $\mathcal{M} = \{A \subseteq \{1,\dots,m\} : |A| = \lceil \frac{m}{2} \rceil\}$
    - potom $\mathcal{M}$ je jistě nezávislý
  - 2) ukážeme, že každý nezávislý systém $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,m\}}$ splňuje $|\mathcal{M}| \leq \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ co do velikosti
    - dvěma způsoby spočítáme počet $Z = |\{(M, \check{R}) : M \in \mathcal{M},\ \check{R}$ = maximální řetězec obsahující $M\}|$
    - **maximální řetězec** $\check{R}$ vypadá následovně:

      $\check{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_m\}$, kde:

      $\emptyset = R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_m = \{1,\dots,m\}$, $|R_{i+1} \setminus R_i| = 1$
    - **1. způsob** odhadnutí Z:
      - každý max. řetězec obsahuje ≤ 1 množinu z $\mathcal{M}$, protože $\mathcal{M}$ je nezávislý $\rightarrow$ $|\check{R} \cap \mathcal{M}| \leq 1$ pro každý max. řetězec $\mathcal{M}$

      $\Rightarrow Z \leq m! \cdot 1 = m!$

      počet maximálních řetězců je $m!$, protože stačí vybrat pořadí prvků z $\{1,\dots,m\}$, ve kterém rozšiřujeme množiny $R_0, R_1, \dots, R_m$
    - **2. způsob** odhadnutí Z:
      - každou množinu $M \in \mathcal{M}$ lze doplnit $|M|!(m-|M|)!$ způsoby na max. řetězec $\check{R} = \{R_0, \dots, R_m\} \ni M$



$$\Rightarrow Z = \sum_{M \in \mathcal{M}} |M|!(m-|M|)!$$

2

- DŮKAZ NÁPADU:

$$\sum_{n \in \mathcal{M}} |n|!\,(m-|n|)! = Z \leq m!$$

$$\Rightarrow 1 \geq \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{|n|!\,(m-|n|)!}{m!} = \sum_{n \in \mathcal{M}} \binom{m}{|n|}^{-1} \geq \sum_{n \in \mathcal{M}} \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{-1} = \frac{|\mathcal{M}|}{\binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}}$$

$\binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ JE NEJVĚTŠÍ BINOMICKÝ KOEFICIENT Z $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \ldots, \binom{m}{m}$, PODLE POZOROVÁNÍ 1.4

$$\Rightarrow \underline{\underline{|\mathcal{M}| \leq \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}}}$$

$\boxtimes$

- POZNÁMKA: PODLE VĚTY O DLOUHÉM A ŠIROKÉM MÁME DOLNÍ ODHAD

$$\geq \frac{|2^{\{1,\ldots,m\}}|}{\omega(2^{\{1,\ldots,m\}}, \subseteq)} = \frac{2^m}{m+1} \ll \frac{2^m}{\Theta(\sqrt{m})} = \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$$

ω: VELIKOST MAXIMÁLNÍHO ŘETĚZCE V $(2^{\{1,\ldots,m\}}, \subseteq)$

$=$: PODLE VĚTY 1.5

RAMSEYOVA TEORIE: (3)

- „KAŽDÝ VELKÝ SYSTÉM OBSAHUJE HOMOGENNÍ PODSYSTÉM" DANÉ VELIKOSTI
- OBARVENÍ MNOŽINY X n BARVAMI (ZKRÁCENĚ n-OBARVENÍ) JE LIBOVOLNÉ ZOBRAZENÍ PŘIŘAZUJÍCÍ KAŽDÉMU PRVKU Z X JEDNU Z n BAREV
- NÁSLEDUJÍCÍ VĚTA JE NEJZÁKLADNĚJŠÍM VÝSLEDKEM TOHOTO TYPU
- VĚTA 10.2 (DIRICHLETŮV PRINCIP): → V ANGLIČTINĚ „PIGEONHOLE PRINCIPLE"

  $\forall n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$: OBARVÍME-LI PRVKY MNOŽINY X n BARVAMI, PAK, JE-LI $|X| \geq D(m_1, \dots, m_n; n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (m_i - 1)$, X OBSAHUJE m_i PRVKŮ i-TÉ BARVY.

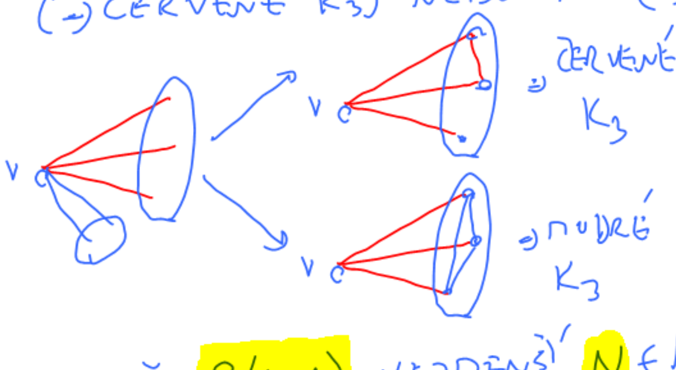
- DŮKAZ JE TRIVIÁLNÍ
- $D(m_1, \dots, m_n; n)$ JE NEJMENŠÍ VELIKOST MNOŽINY X, PRO KTEROU DIRICHLETŮV PRINCIP PLATÍ:

$$|X| = \sum_{i=1}^{n} (m_i - 1)$$

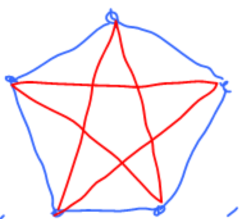
$\Rightarrow \nexists\, m_i$ PRVKŮ Z X i-TÉ BARVY

- CO KDYŽ OBARVUJEME DVOJICE PRVKŮ Z X?
- PŘÍKLAD:
  - NA KAŽDÉ PÁRTY ≥ 6 LIDÍ EXISTUJÍ 3, CO SE NAVZÁJEM ZNAJÍ, NEBO 3, CO SE NAVZÁJEM NEZNAJÍ (NEBOLI V KAŽDÉM 2-OBARVENÍ $E(K_m)$, $m \geq 6$, EXISTUJE TROJÚHELNÍK S HRANAMI TÉŽE BARVY)
    - MĚJME 2-OBARVENÍ $E(K_m)$ ČERVENOU A MODROU BARVOU
    - VRCHOL $v \in V(K_m)$ MÁ $m-1$ SOUSEDŮ, Z NICHŽ, PODLE VĚTY 10.2, ASPOŇ $\left\lceil \frac{m-1}{2} \right\rceil \geq 3$ JE SPOJENO S v ČERVENOU HRANOU

      ↳ BÚNO
    - TITO 3 SOUSEDÉ MEZI SEBOU BUĎ MAJÍ ČERVENOU HRANU ($\Rightarrow$ ČERVENÉ K_3) NEBO NE ($\Rightarrow$ MODRÉ K_3)



- PRO K_5 NEPLATÍ:



- PRO $k, l \in \mathbb{N}$ BUĎ $R(k,l)$ NEJMENŠÍ $N \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE KAŽDÉ 2-OBARVENÍ $E(K_N)$ OBSAHUJE ČERVENÉ K_k ČI MODRÉ K_l JAKO PODGRAF

  ↓ BÚNO ČERVENOU A MODROU BARVOU

  - TEDY KAŽDÝ GRAF G S $\geq R(k,l)$ VRCHOLY OBSAHUJE K_k ČI JEHO DOPLNĚK $\bar{G}$ OBSAHUJE K_l JAKO PODGRAF

VĚTA 10.3 (RAMSEYOVA VĚTA PRO 2 BARVY): 4

$\forall k, l \in \mathbb{N}$: $R(k,l)$ JE KONEČNÉ. DOKONCE $R(k,l) \le \binom{k+l-2}{k-1} = \binom{k+l-2}{l-1}$

– RAMSEYOVU VĚTU (V OBECNĚJŠÍM ZNĚNÍ) DOKÁZAL RAMSEY (1928), UVEDENÝ ODHAD DOKÁZALI ERDŐS A SZEKERES (1935), KTEŘÍ JI OBJEVILI NEZÁVISLE

– DK:

– INDUKCÍ PODLE $k+l$

– ZAČÁTEK INDUKCE:

– JE-LI $k=1$ NEBO $l=1$, PAK $R(k,l)=1$

↳ CHCEME 1-BAREVNÉ K_1, COŽ JE LIBOVOLNÝ VRCHOL

– INDUKČNÍ KROK:

– NECHŤ $k \ge 2$ A $l \ge 2$

– PODLE IP $R(k-1,l) \le \binom{k+l-3}{k-2}$ A $R(k,l-1) \le \binom{k+l-3}{k-1}$

– UKÁŽEME, ŽE $R(k,l) \le R(k-1,l) + R(k,l-1)$

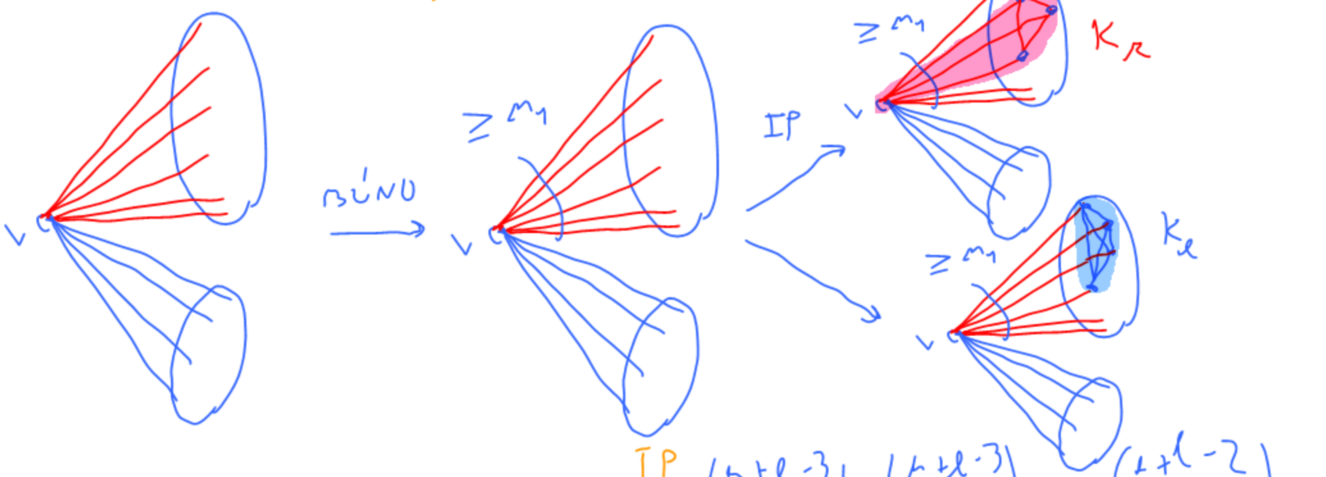
– MĚJME $N \ge R(k-1,l) + R(k,l-1)$ VRCHOLŮ A ZVOLME $v \in V(K_N)$

– PROTOŽE $N \ge 1 + \underset{\text{ZA VRCHOL } v}{1} + \big(\underbrace{(R(k-1,l)-1)}_{m_1-1} + \underbrace{(R(k,l-1)-1)}_{m_2-1}\big)$, PAK PODLE VĚTY 10.2 EXISTUJE BUĎ $\ge m_1$ VRCHOLŮ SPOJENÝCH S v ČERVENOU HRANOU NEBO $\ge m_2$ VRCHOLŮ SPOJENÝCH S v MODROU HRANOU

– BÚNO v MÁ $\ge m_1 = R(k-1,l)$ ČERVENÝCH SOUSEDŮ ⇒ ČERVENÍ SOUSEDÉ MEZI SEBOU OBSAHUJÍ BUĎ ČERVENÉ K_{k-1} NEBO MODRÉ K_l

↓ TO SPOLU S v TVOŘÍ ČERVENÉ K_k ⇒ JSME HOTOVI

↳ PAK JSME HOTOVI



$$\Rightarrow R(k,l) \le R(k-1,l) + R(k,l-1) \overset{IP}{\le} \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$$

⊠

- URČIT RAMSEYOVSKÁ ČÍSLA $R(k,l)$ PŘESNĚ JE VELICE OBTÍŽNÉ (UŽ PRO MALÉ PŘÍPADY)
- NENÍ ZNÁMÝ ŽÁDNÝ VZOREC
- ZNÁMÁ NETRIVIÁLNÍ RAMSEYOVSKÁ ČÍSLA $R(k,k)$:

$$R(3,3)=6$$
$$R(4,4)=18$$
$$43 \leq R(5,5) \leq 48$$
$$102 \leq R(4,6) \leq 147$$

- JAK PŘESNÝ JE ODHAD $R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq 4^k$?
  - DLOUHOU DOBU NEBYL ZNÁMÝ LEPŠÍ NEŽ POLYNOMIÁLNÍ ODHAD
  - ERDŐS (1947) UKÁZAL, ŽE $R(k,k)$ ROSTE EXPONENCIÁLNĚ POMOCÍ PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO ARGUMENTU

- **VĚTA 10.4**:

$$\forall k \geq 3: R(k,k) \geq 2^{k/2}.$$

DK:

- MĚJME $N < 2^{k/2}$
- UVAŽME NÁHODNÉ 2-OBARVENÍ χ HRAN Z $E(K_N)$:

$$\forall e \in E(K_N): \chi(e) = \begin{cases} \text{ČERVENÁ} & \text{S PRAVDĚPODOBNOSTÍ } \frac{1}{2} \\ \text{MODRÁ} & \text{S PRAVDĚPODOBNOSTÍ } \frac{1}{2} \end{cases}$$

(NÁHODNĚ, NEZÁVISLE)

- PRO $\forall K \in \binom{V(K_N)}{k}$ OZNAČME JEV A_K = „K INDUKUJE 1-BAREVNÉ K_k V χ"

$\Rightarrow \Pr(A_K) = 2^{1-\binom{k}{2}}$

↳ $\Pr(\text{VŠECHNY HRANY JSOU ČERVENÉ}) = 2^{-\binom{k}{2}}$ A TOTÉŽ PRO MODROU

- $p = \Pr(\text{V } \chi \ \exists \text{ 1-BAREVNÉ } K_k)$
- CHCEME UKÁZAT, ŽE $p<1$, PAK TOTIŽ $\exists \chi$ BEZ 1-BAREVNÉHO K_k A MÁME $R(k,k) > N$

↳ PROTOŽE JEV URČUJÍCÍ p NENÍ JISTÝ

- PLATÍ

$$p \leq \sum_{K \in \binom{V(K_N)}{k}} \Pr(A_K) = \sum_{K \in \binom{V(K_N)}{k}} 2^{1-\binom{k}{2}} = \binom{N}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \leq$$

„UNION BOUND"

$$\leq \frac{N^k}{2^{k/2+1}} \cdot 2^{-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+1} = N^k \cdot 2^{-k^2/2} < 1$$

↳ PRO $N < 2^{k/2}$ $\boxtimes$

ODHAD $\binom{N}{k} \leq \frac{N^k}{2^{k/2+1}}$, PLYNE Z ODHADU $\binom{N}{k} \leq \frac{N^k}{k!}$ Z 1. PŘEDNÁŠKY (PRO $k \geq 3$)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sqrt{2}^k \leq R(k,k) \leq 4^k}}$$

- ODHADY SE PŘÍLIŠ VYLEPŠIT NEUMÍ

NEJLEPŠÍ DOLNÍ ODHAD: $R(k,k) \geq (1-o(1)) \frac{\sqrt{2}\,k}{e} 2^{k/2}$

- **OTEVŘENÝ PROBLÉM** (100 \$): $\exists \lim_{k \to \infty} R(k,k)^{1/k}$?

↳ POKUD ANO, PAK $\in [\sqrt{2}, 4]$