- ODHADY FAKTORIÁLU:
  - FAKTORIÁL = $n!$ $= n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ = POČET BIJEKCÍ $\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ (1)
  - DEFINICE ŘÍKÁ VŠE, ALE ŠPATNĚ SE S NÍ POČÍTÁ
    ↳ JAK RYCHLE ROSTE $\frac{n^n}{n!}$?
  - UKÁŽEME SI TŘI ODHADY
  - TVRZENÍ 1.1:
    $\forall n\in\mathbb{N}:\ n^{n/2}\le n!\le n^n$

DK:

i) HORNÍ ODHAD:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \overbrace{i}^{\le n} \le \prod_{i=1}^{n} n = \underline{\underline{n^n}}$$

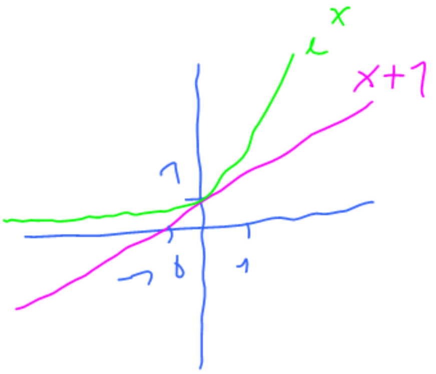
ii) DOLNÍ ODHAD:

- POUŽIJEME NEROVNOST, KTERÁ ŘÍKÁ, ŽE PRO KAŽDÉ $i=1,\dots,n$ PLATÍ $i(n+1-i)\ge n$
  - PLATÍ PRO $i=1$ A $i=n$
  - PRO $2\le i\le\lceil\frac{n}{2}\rceil$ MÁME $i(n+1-i)\ge 2\cdot\frac{n}{2}=n$
  - PRO $\lceil\frac{n}{2}\rceil\le i<n$ MÁME $i(n+1-i)\ge\frac{n}{2}\cdot 2=n$
  - $\Rightarrow$ PLATÍ PRO KAŽDÉ $i=1,\dots,n$

$$\Rightarrow (n!)^2 = n!\cdot n! = \underbrace{n\cdot 1}_{\ge n}\cdot\underbrace{(n-1)\cdot 2}_{\ge n}\cdots\underbrace{2\,(n-1)}_{\ge n}\cdot\underbrace{1\cdot n}_{\ge n}\ge$$

$$\ge n^n \qquad\Rightarrow\quad \underline{\underline{n!\ge n^{n/2}}} \qquad \boxtimes$$

- NYNÍ SI UKÁŽEME SILNĚJŠÍ ODHAD
- VĚTA 1.2:
  PRO $\forall n\in\mathbb{N}:\ e\left(\frac{n}{e}\right)^n\le n!\le e\cdot n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$
- LEMMA 1.3:
  - PRO $\forall x\in\mathbb{R}:\ 1+x\le e^x$ $(e\approx 2{,}71828\dots)$
    - DŮLEŽITÝ ODHAD!



- DK:
  - $f(x) := e^x-(x+1)$ – CHCEME UKÁZAT, ŽE $f(x)\ge 0$ PRO $\forall x\in\mathbb{R}$
  - $f'(x)=e^x-1 \Rightarrow (f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0)$
    ↳ 0 JE STACIONÁRNÍ BOD
  - $f''(x)=e^x$
  - $f''(0)=1>0 \Rightarrow$ V BODĚ $x=0$ JE GLOBÁLNÍ MINIMUM PRO f $\Rightarrow f(x)\ge 0$ PRO $\forall x\in\mathbb{R}$ $\boxtimes$

- DVA DŮKAZY VĚTY 1.2
- 1. DŮKAZ (INDUKCÍ):

a) HORNÍ ODHAD:

- PRO $n=1$ PLATÍ $\left(1 = 1! \leq e \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1\right)$
- NECHŤ $n \geq 2$
- $n! = n \cdot \underbrace{(n-1)!}_{\text{IP}} \leq n \cdot \underbrace{e \cdot (n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}_{} =$

$$= e \cdot n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \underbrace{e \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n}_{\text{CHCEME } \leq 1}$$

- $e\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{} \leq e \cdot \underbrace{\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n}_{} = \underline{\underline{1}}$

LEMMA 1.3 PRO $x := -1/n$

b) DOLNÍ ODHAD:

- PRO $n=1$ PLATÍ $\left(1 = e\left(\frac{1}{e}\right)^1 \leq 1! = 1\right)$
- NECHŤ $n \geq 2$
- $n! = n\underbrace{(n-1)!}_{\text{IP}} \geq n \cdot \underbrace{e\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}_{} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \underbrace{e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}_{\text{CHCEME } \geq 1}$
- $e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \geq 1 \iff \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq 1$

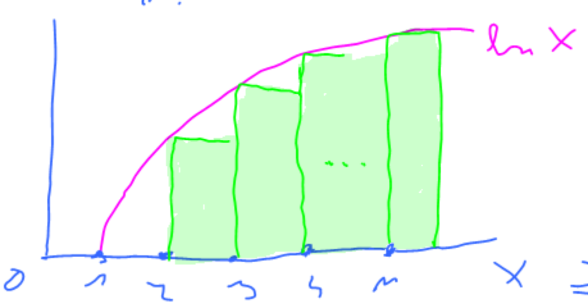
$$\frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{} \leq \frac{1}{e}\underbrace{\left(e^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}}_{} = \underline{\underline{1}}$$

LEMMA 1.3 S $x := 1/(n-1)$

$\boxtimes$

- 2. DŮKAZ (INTEGRÁLEM):

- POUZE HORNÍ ODHAD (DOLNÍ ODHAD ANALOGICKY)
- $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \Rightarrow \ln(n!) = \underbrace{\ln(n) + \ln(n-1) + \cdots + \ln(2) + \ln(1)}_{\text{PLOCHA ZELENÝCH OBDÉLNÍKŮ}} \leq$



PLOCHA POD ln x

$$\leq \int_1^{n+1} \ln x \, dx = (n+1)\ln(n+1) - n$$

$$\Rightarrow n! = n(n-1)! = n \cdot e^{\ln((n-1)!)} \leq n \cdot \underbrace{e^{n \ln n}}_{= n^n} e^{-(n-1)} =$$

$$= \underline{\underline{n e \left(\frac{n}{e}\right)^n}}$$

$\boxtimes$

- NEJSILNĚJŠÍ ZNÁMÝ ODHAD FAKTORIÁLU
- **VĚTA 1.4 (STIRLINGOVA FORMULE):**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

↳ ZNAČÍ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$

- BEZ DŮKAZU

- DOKÁZAL DE MOIVRE, STIRLING URČIL KONSTANTU

- **ODHADY KOMBINAČNÍCH ČÍSEL:**
  - $n, k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ = POČET VÝBĚRŮ NEUSPOŘÁDANÝCH k-TIC Z n-TIC

- **POZOROVÁNÍ 1.5:**

(i) $\forall n, k \in \mathbb{N},\ n \geq k$: $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k$ (HODÍ SE PRO $n \gg k$)

(ii) NEJVĚTŠÍ KOMBINAČNÍ ČÍSLO PRO DANÉ n JE $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

A PLATÍ $\displaystyle\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$

DK: (i) $\displaystyle\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}$ A $\displaystyle\frac{n-i}{k-i} \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} \leq n^k$

$\displaystyle\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k}$ PRO $n \geq k$ A $i \in \{0, \dots, k-1\}$

$\Rightarrow \displaystyle\binom{n}{k} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k$

(ii) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n+1-k}{k}$ $\begin{cases} > 1 & \text{PRO } k < \frac{n+1}{2} \\ < 1 & \text{PRO } k > \frac{n+1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ PRO $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil$ FUNKCE $\binom{n}{k}$ NABÝVÁ MAXIMA

- BINOMICKÁ VĚTA $\Rightarrow \displaystyle\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \leq 2^n$ ☒

- **VĚTA 1.6:**
  - PRO KAŽDÉ $m \in \mathbb{N}$ PLATÍ $$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \le \binom{2m}{m} \le \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$$

- DŮKAZ VĚTY 1.5:
  - DEFINUJME $$P := \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2m}$$
  - POTOM $$P \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$ A TEDY $$P = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}$$

  $\Rightarrow$ CHCEME $$\frac{1}{2\sqrt{m}} \overset{(ii)}{\le} P \overset{(i)}{\le} \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

  (i) UVAŽME $$1 > \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m)^2}\right) =$$ $$= \left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4^2}\right)\cdots\left(\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}\right) = (2m+1)P^2$$

  $$\Rightarrow P < \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \le \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

  (ii) UVAŽME $$1 > \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m-1)^2}\right) =$$ $$= \left(\frac{2\cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4\cdot 6}{5^2}\right)\cdots\left(\frac{(2m-2)(2m)}{(2m-1)^2}\right) = \frac{1}{2\cdot 2m\, P^2}$$

  $$\Rightarrow P > \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

  $\boxtimes$

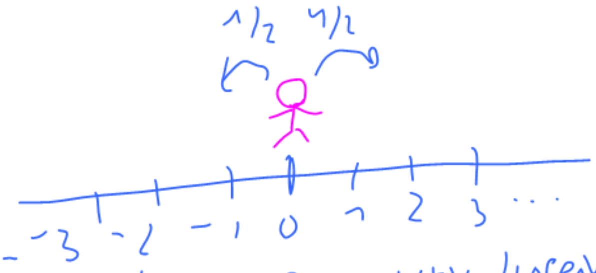
- **STIRLINGOVA FORMULE** $$\Rightarrow \binom{2m}{m} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$$

- $\forall n, k \in \mathbb{N}$ S $n \ge k$ PLATÍ $$\binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$$
  - BEZ DŮKAZU

- APLIKACE: (5)

1) ODHAD $\binom{2n}{n}$ JE ZÁKLADEM JEDNOHO Z NEJJEDNODUŠŠÍCH DŮKAZŮ BERTRANDOVA POSTULÁTU ($\forall n\ \exists$ PRVOČÍSLO p S $n < p \leq 2n$)

2) NÁHODNÉ PROCHÁZKY:



- STOJÍME V 0 NA OSE $\mathbb{Z}$
- V $\forall$ KROCE NÁHODNĚ NEZÁVISLE UDĚLÁME KROK DOLEVA/DOPRAVA S PRAVDĚPODOBNOSTÍ 1/2
- n KROKŮ CELKEM, $n \longrightarrow \infty$
- KOLIKRÁT SE VRÁTÍME DO 0?
  - NÁHODNÁ VELIČINA $X = I_{A_2} + I_{A_4} + \dots$, KDE $I_{A_{2n}}$ JE INDIKÁTOROVÁ VELIČINA JEVU A_{2n} = „PO $2n$ KROCÍCH JSME V 0"

- $P(A_{2n}) = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \overset{\text{VĚTA 1.6}}{\geq} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

VÝBĚR n KROKŮ DOLEVA, ZBYLÝCH n KROKŮ DOPRAVA S $2n$ KROKY
2^{2n} - CELKOVÝ POČET PROCHÁZEK

$X = \sum_{n=1} I_{A_{2n}}$

- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_{A_{2n}}\right] \overset{\text{LINEARITA } \mathbb{E}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[I_{A_{2n}}] = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{2n}) \geq$

$\mathbb{E}[I_{A_{2n}}] = P(A_{2n})$ Z DEFINICE INDIKÁTOROVÉ VELIČINY

$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow$ STŘEDNÍ HODNOTA POČTU NÁVRATŮ ROSTE DO NEKONEČNA

- V $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ TAKÉ $\mathbb{E}[X] \longrightarrow \infty$

V $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ UŽ NE!

$\lambda(d) := \Pr[\text{VRÁTÍME SE DO POČÁTKU V } \mathbb{Z}^d] \begin{cases} = 1 & d \in \{1,2\} \\ < 1 & d \geq 3 \end{cases}$

(PÓLYOVA VĚTA)

$(\lambda(3) \approx 0{,}34)$