

# Kombinatorika a grafy 1

Martin Balko

## 9. přednáška

30. listopadu 2022



# Míra souvislosti grafů

## Připomenutí z minula I

## Připomenutí z minula I

- **Hranový řez** v grafu  $G = (V, E)$  je  $F \subseteq E$  taková, že  $G - F$  je nesouvislý.

## Připomenutí z minula I

- **Hranový řez** v grafu  $G = (V, E)$  je  $F \subseteq E$  taková, že  $G - F$  je nesouvislý.
- **Vrcholový řez** v grafu  $G$  je  $A \subseteq V$  taková, že  $G - A$  je nesouvislý.

## Připomenutí z minula I

- **Hranový řez** v grafu  $G = (V, E)$  je  $F \subseteq E$  taková, že  $G - F$  je nesouvislý.
- **Vrcholový řez** v grafu  $G$  je  $A \subseteq V$  taková, že  $G - A$  je nesouvislý.
- **Hranová souvislost** grafu  $G$  je

$$k_e(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ \min\{|F| : F \text{ je hranový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

## Připomenutí z minula I

- **Hranový řez** v grafu  $G = (V, E)$  je  $F \subseteq E$  taková, že  $G - F$  je nesouvislý.
- **Vrcholový řez** v grafu  $G$  je  $A \subseteq V$  taková, že  $G - A$  je nesouvislý.
- **Hranová souvislost** grafu  $G$  je

$$k_e(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ \min\{|F| : F \text{ je hranový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Vrcholová souvislost** grafu  $G$  je

$$k_v(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ n - 1, & \text{je-li } G \cong K_n \text{ s } n \geq 2, \\ \min\{|A| : A \text{ je vrcholový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

## Připomenutí z minula I

- **Hranový řez** v grafu  $G = (V, E)$  je  $F \subseteq E$  taková, že  $G - F$  je nesouvislý.
- **Vrcholový řez** v grafu  $G$  je  $A \subseteq V$  taková, že  $G - A$  je nesouvislý.
- **Hranová souvislost** grafu  $G$  je

$$k_e(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ \min\{|F| : F \text{ je hranový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Vrcholová souvislost** grafu  $G$  je

$$k_v(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ n - 1, & \text{je-li } G \cong K_n \text{ s } n \geq 2, \\ \min\{|A| : A \text{ je vrcholový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Graf  $G$  je **hranově  $t$ -souvislý**, pokud  $k_e(G) \geq t$ .



## Připomenutí z minula I

- **Hranový řez** v grafu  $G = (V, E)$  je  $F \subseteq E$  taková, že  $G - F$  je nesouvislý.
- **Vrcholový řez** v grafu  $G$  je  $A \subseteq V$  taková, že  $G - A$  je nesouvislý.
- **Hranová souvislost** grafu  $G$  je

$$k_e(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ \min\{|F| : F \text{ je hranový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Vrcholová souvislost** grafu  $G$  je

$$k_v(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ n - 1, & \text{je-li } G \cong K_n \text{ s } n \geq 2, \\ \min\{|A| : A \text{ je vrcholový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Graf  $G$  je **hranově  $t$ -souvislý**, pokud  $k_e(G) \geq t$ .
- Graf  $G$  je **vrcholově  $t$ -souvislý**, pokud  $k_v(G) \geq t$ .

## Připomenutí z minula II

## Připomenutí z minula II

- Při odebrání hrany hranová ani vrcholová souvislost grafu nevzroste a obě klesnou nanejvýš o 1.

## Připomenutí z minula II

- Při odebrání hrany hranová ani vrcholová souvislost grafu nevzroste a obě klesnou nanejvýš o 1.
- Pro každý graf  $G$  platí  $k_v(G) \leq k_e(G)$ .

## Připomenutí z minula II

- Při odebrání hrany hranová ani vrcholová souvislost grafu nevzroste a obě klesnou nanejvýš o 1.
- Pro každý graf  $G$  platí  $k_v(G) \leq k_e(G)$ .

### Fordova–Fulkersonova věta

Pro každý graf  $G \not\cong K_1$  a  $t \in \mathbb{N}$  platí:  $k_e(G) \geq t$  právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy z  $G$  existuje aspoň  $t$  hranově disjunktních cest.

## Připomenutí z minula II

- Při odebrání hrany hranová ani vrcholová souvislost grafu nevzroste a obě klesnou nanejvýš o 1.
- Pro každý graf  $G$  platí  $k_v(G) \leq k_e(G)$ .

### Fordova–Fulkersonova věta

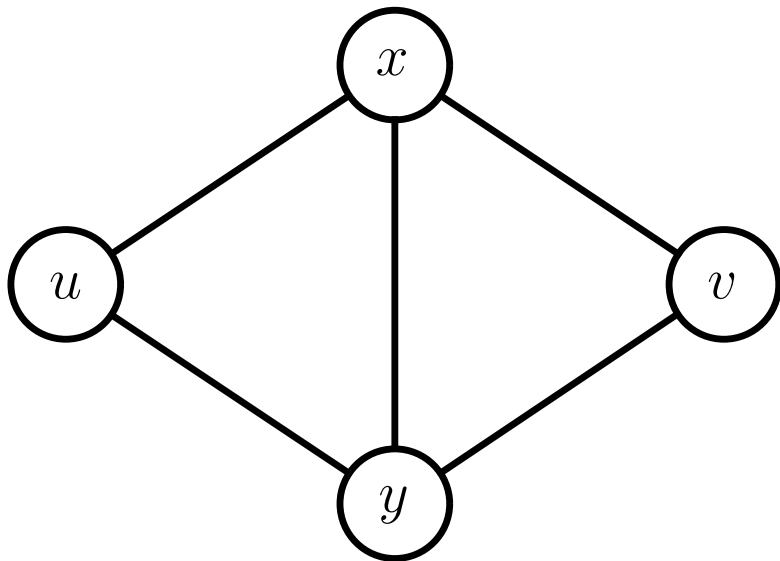
Pro každý graf  $G \not\cong K_1$  a  $t \in \mathbb{N}$  platí:  $k_e(G) \geq t$  právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy z  $G$  existuje aspoň  $t$  hranově disjunktních cest.

### Mengerova věta

Pro každý graf  $G \not\cong K_1$  a  $t \in \mathbb{N}$  platí:  $k_v(G) \geq t$  právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy z  $G$  existuje aspoň  $t$  vrcholově disjunktních cest (mimo jejich koncové vrcholy).

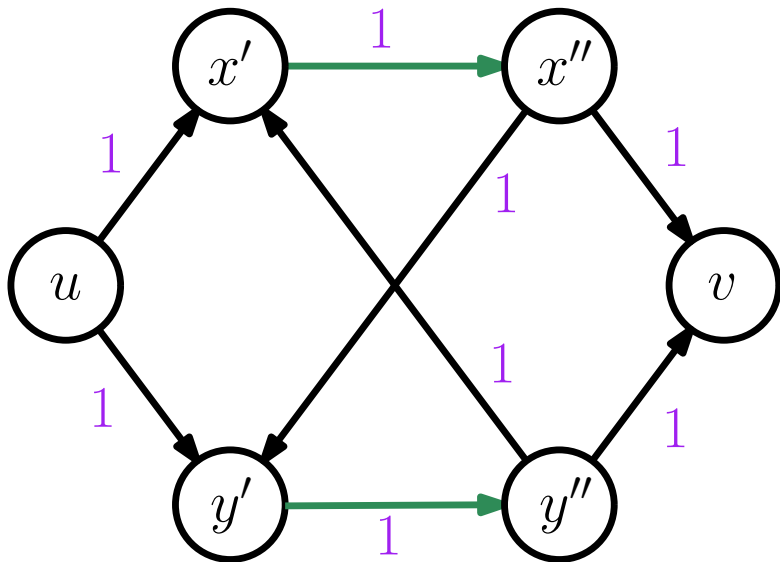
## Příklad sítě v Mengerově větě

## Příklad sítě v Mengerově větě



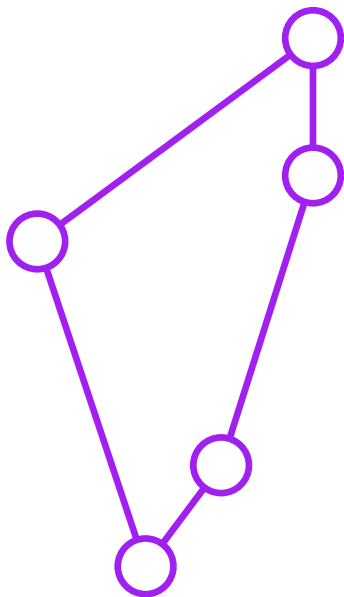


## Příklad sítě v Mengerově větě

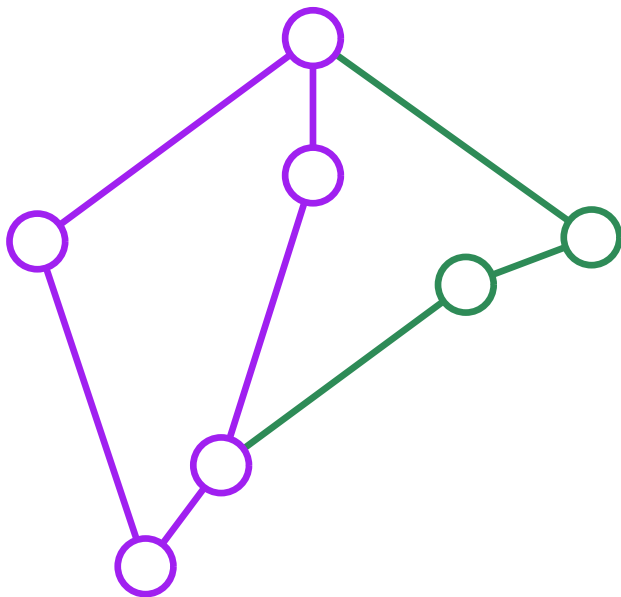


# Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší

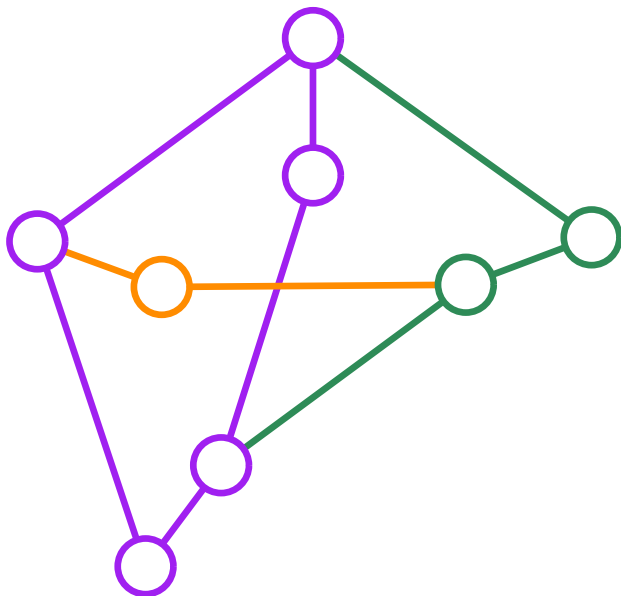
## Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



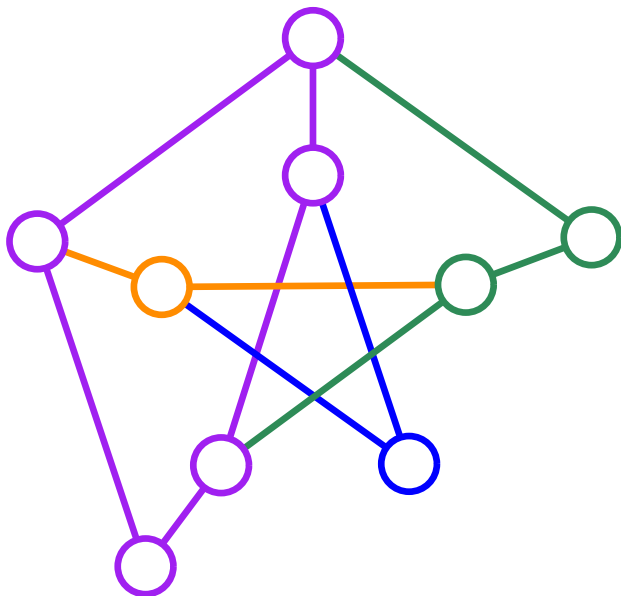
## Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



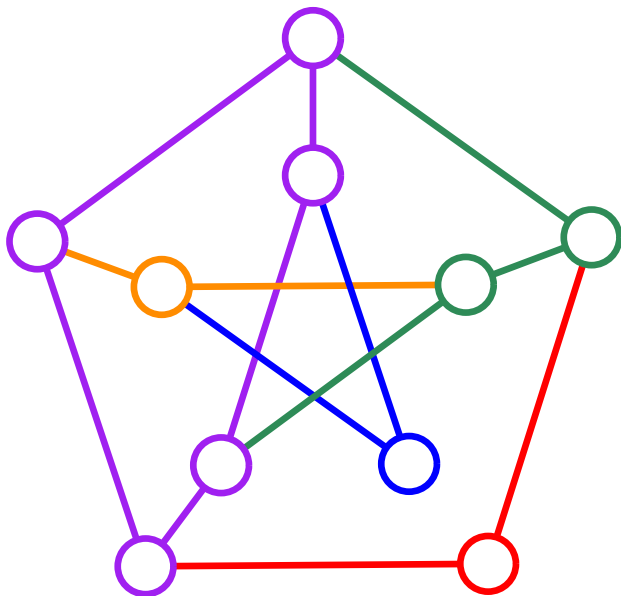
## Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



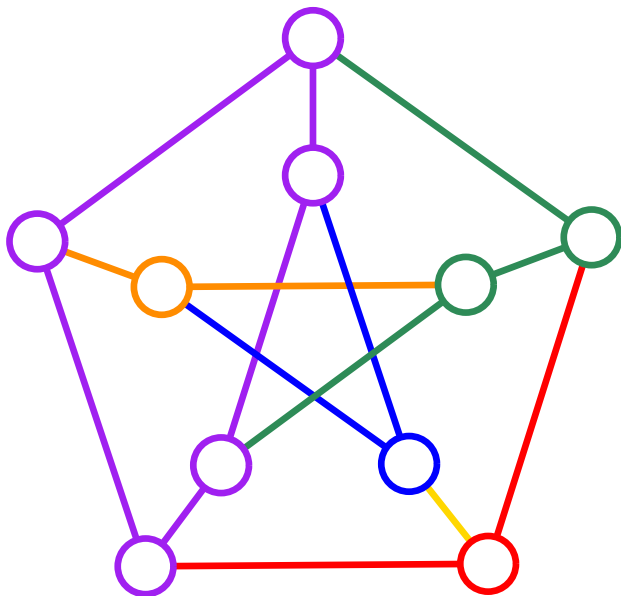
## Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



## Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



## Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší





# Počítání dvěma způsoby

# Počítání dvěma způsoby

*Počítáme-li prvky jedné množiny dvěma způsoby, dostaneme vždy stejný výsledek.*

Počet koster v grafu  $K_n$

## Počet koster v grafu $K_n$

$$\kappa(2) = 1$$



# Počet koster v grafu $K_n$

$$\kappa(2) = 1$$



$$\kappa(3) = 3$$



# Počet koster v grafu $K_n$

$$\kappa(2) = 1$$



$$\kappa(3) = 3$$



$$\kappa(4) = 16$$



# Cayleyho vzorec

## Cayleyho vzorec

- Pro každé  $n \geq 1$  se počet koster grafu  $K_n$  rovná  $n^{n-2}$ .

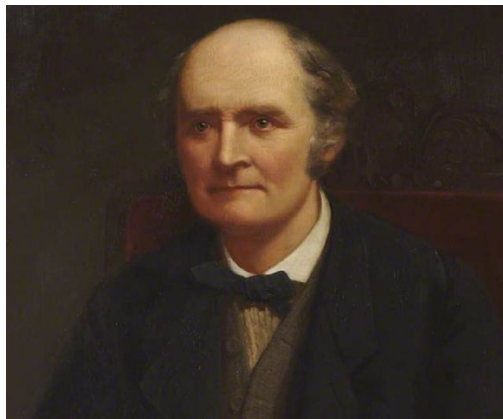


## Cayleyho vzorec

- Pro každé  $n \geq 1$  se počet koster grafu  $K_n$  rovná  $n^{n-2}$ .
- Objevil ho [Carl Wilhelm Borchardt](#) v roce 1860.

## Cayleyho vzorec

- Pro každé  $n \geq 1$  se počet koster grafu  $K_n$  rovná  $n^{n-2}$ .
- Objevil ho **Carl Wilhelm Borchardt** v roce 1860.



Obrázek: **Carl Wilhelm Borchardt** (1817–1880) a **Arthur Cayley** (1821–1895).

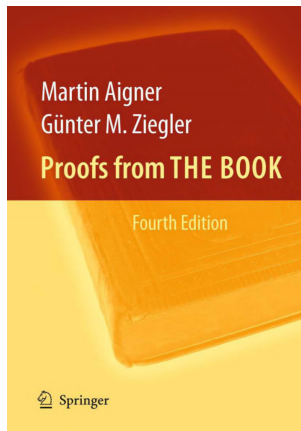
## Cayleyho vzorec: důkazy

## Cayleyho vzorec: důkazy

- Existuje řada důkazů. Čtyři jsou popsány v knize **Proofs from the Book**.

# Cayleyho vzorec: důkazy

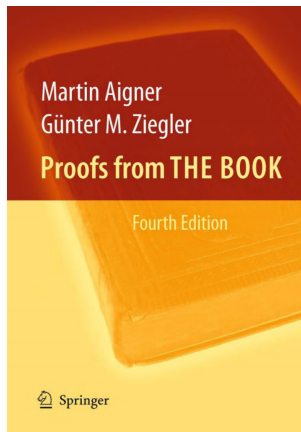
- Existuje řada důkazů. Čtyři jsou popsány v knize **Proofs from the Book**.



Obrázek: **Paul Erdős** (1913–1996) a **Proofs from the Book**.

# Cayleyho vzorec: důkazy

- Existuje řada důkazů. Čtyři jsou popsány v knize **Proofs from the Book**.



Obrázek: **Paul Erdős** (1913–1996) a **Proofs from the Book**.

Zdroje: <http://en.wikipedia.org>

- Ukážeme nejjednodušší z nich, objevený **Jimem Pitmanem** v roce 1999.

Počet koster v grafu  $K_n - e$

Počet koster v grafu  $K_n - e$





## Počet koster v grafu $K_n - e$

$$\kappa(K_2 - e) = 0$$



# Počet koster v grafu $K_n - e$

$$\kappa(K_2 - e) = 0$$



# Počet koster v grafu $K_n - e$

$$\kappa(K_2 - e) = 0$$



$$\kappa(K_3 - e) = 1$$



# Počet koster v grafu $K_n - e$

$$\kappa(K_2 - e) = 0$$



$$\kappa(K_3 - e) = 1$$



# Počet koster v grafu $K_n - e$

$$\kappa(K_2 - e) = 0$$



$$\kappa(K_3 - e) = 1$$



$$\kappa(K_4 - e) = 8$$





*“A nonstandard method of counting trees: Put a cat into each tree, walk your dog, and count how often he barks.”*

Zdroj: „Proofs from the Book“ (Aigner, Ziegler)



*“A nonstandard method of counting trees: Put a cat into each tree, walk your dog, and count how often he barks.”*

Zdroj: „Proofs from the Book“ (Aigner, Ziegler)

**Děkuji za pozornost.**