Kombinatorika a grafy 1

Martin Balko

7. přednáška

16. listopadu 2022

Aplikace toků v sítích

Připomenutí toků I

Připomenutí toků I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.

Připomenutí toků I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \le f(e) \le c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.

Připomenutí toků I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v, u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z, v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v, z)$.

Připomenutí toků I

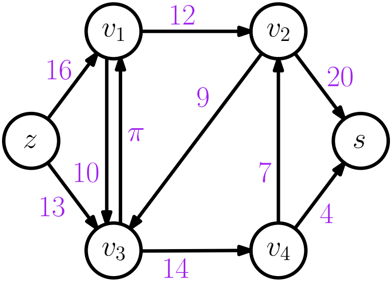
- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \le f(e) \le c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z)$.
- Řez R je podmnožina E zasahující do každé orientované cesty ze z do s.

Připomenutí toků I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z)$.
- Řez R je podmnožina E zasahující do každé orientované cesty ze z do s.
- Kapacita řezu R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.

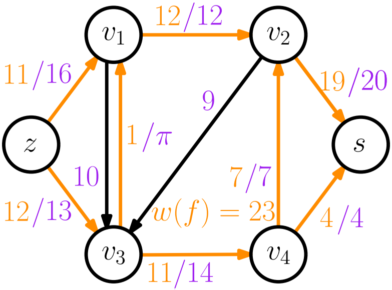
Připomenutí toků I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z)$.
- Řez R je podmnožina E zasahující do každé orientované cesty ze z do s.
- Kapacita řezu R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.



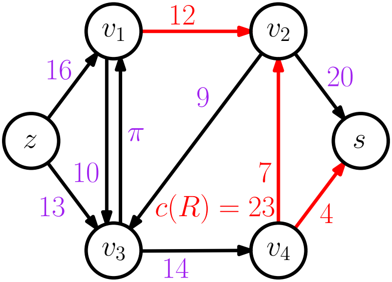
Připomenutí toků I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \le f(e) \le c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z)$.
- Řez R je podmnožina E zasahující do každé orientované cesty ze z do s.
- Kapacita řezu R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.



Připomenutí toků I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z)$.
- Řez R je podmnožina E zasahující do každé orientované cesty ze z do s.
- Kapacita řezu R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.



Připomenutí toků II

Připomenutí toků II

Věta 6.2 (Hlavní věta o tocích)

V každé síti existuje maximální tok a jeho velikost se rovná kapacitě minimálního řezu.

Připomenutí toků II

Věta 6.2 (Hlavní věta o tocích)

V každé síti existuje maximální tok a jeho velikost se rovná kapacitě minimálního řezu.

- Máme Fordův–Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku:

Připomenutí toků II

Věta 6.2 (Hlavní věta o tocích)

V každé síti existuje maximální tok a jeho velikost se rovná kapacitě minimálního řezu.

- Máme Fordův–Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku:
  - Začni s nulovým tokem a dokud existuje cesta P ze z do s, kde

    $$\varepsilon_P = \min_{e \in E(P)} \begin{cases} c(e) - f(e) & e \text{ je dopředná hrana v } P, \\ f(e) & e \text{ je zpětná hrana v } P \end{cases}$$

    je kladné, tak zvyš tok o ε_P po dopředných hranách z P a sniž jej o ε_P po zpětných hranách z P.
  - Poté vrať aktuální tok (ten už bude mít maximální velikost).

Připomenutí toků II

Věta 6.2 (Hlavní věta o tocích)

V každé síti existuje maximální tok a jeho velikost se rovná kapacitě minimálního řezu.

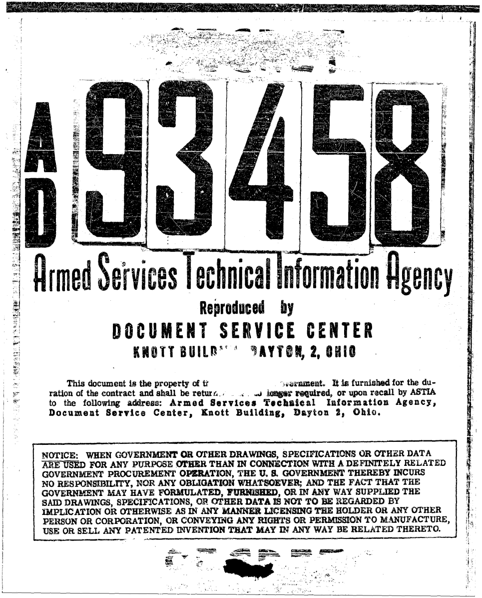
- Máme Fordův–Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku:
  - Začni s nulovým tokem a dokud existuje cesta P ze z do s, kde

$$\varepsilon_P = \min_{e \in E(P)} \begin{cases} c(e) - f(e) & e \text{ je dopředná hrana v } P, \\ f(e) & e \text{ je zpětná hrana v } P \end{cases}$$

    je kladné, tak zvyš tok o ε_P po dopředných hranách z P a sniž jej o ε_P po zpětných hranách z P.
  - Poté vrať aktuální tok (ten už bude mít maximální velikost).

Věta 6.6 (Věta o celočíselnosti)

V každé síti s celočíselnými kapacitami Fordův–Fulkersonův algoritmus najde po konečně mnoha krocích tok maximální velikosti a ta je celočíselná.



AD 93458

Armed Services Technical Information Agency

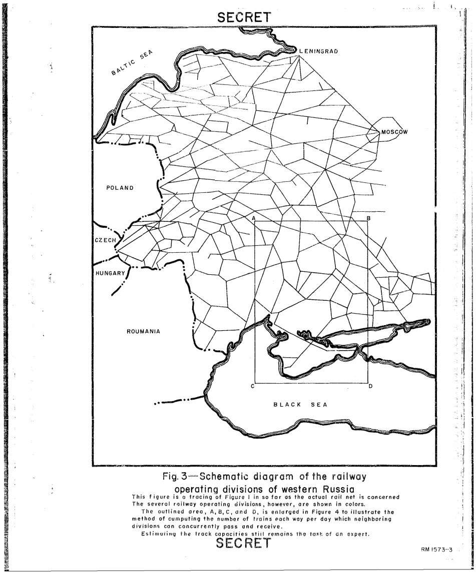
Reproduced by

DOCUMENT SERVICE CENTER

KNOTT BUILD[illegible] DAYTON, 2, OHIO

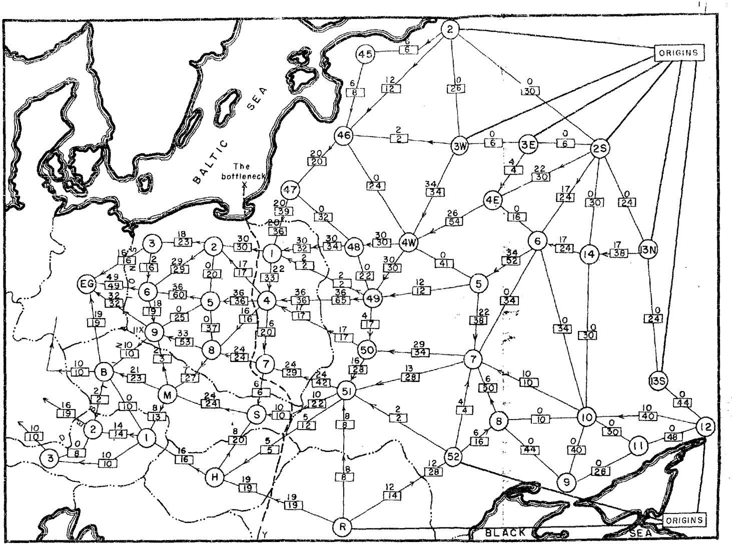
This document is the property of t[illegible] [illegible]vernment. It is furnished for the duration of the contract and shall be retur[illegible] [illegible] longer required, or upon recall by ASTIA to the following address: Armed Services Technical Information Agency, Document Service Center, Knott Building, Dayton 2, Ohio.

NOTICE: WHEN GOVERNMENT OR OTHER DRAWINGS, SPECIFICATIONS OR OTHER DATA ARE USED FOR ANY PURPOSE OTHER THAN IN CONNECTION WITH A DEFINITELY RELATED GOVERNMENT PROCUREMENT OPERATION, THE U. S. GOVERNMENT THEREBY INCURS NO RESPONSIBILITY, NOR ANY OBLIGATION WHATSOEVER; AND THE FACT THAT THE GOVERNMENT MAY HAVE FORMULATED, FURNISHED, OR IN ANY WAY SUPPLIED THE SAID DRAWINGS, SPECIFICATIONS, OR OTHER DATA IS NOT TO BE REGARDED BY IMPLICATION OR OTHERWISE AS IN ANY MANNER LICENSING THE HOLDER OR ANY OTHER PERSON OR CORPORATION, OR CONVEYING ANY RIGHTS OR PERMISSION TO MANUFACTURE, USE OR SELL ANY PATENTED INVENTION THAT MAY IN ANY WAY BE RELATED THERETO.



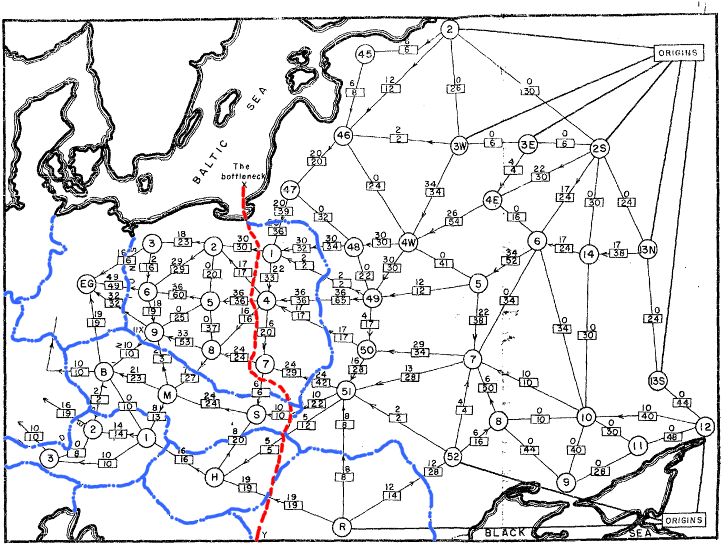
Obrázek: Hledání minimálního řezu v železniční síti východního bloku.

Zdroj: Fundamentals of a method for evaluating rail net capacities (T.E. Harris a F.S. Ross)



Obrázek: Minimální řez v železniční síti východního bloku.

Zdroj: Fundamentals of a method for evaluating rail net capacities (T.E. Harris a F.S. Ross)



Obrázek: Minimální řez v železniční síti východního bloku.

Zdroj: Fundamentals of a method for evaluating rail net capacities (T.E. Harris a F.S. Ross)

Kőnigova–Egerváryho věta

Kőnigova–Egerváryho věta

Věta 7.1 (Kőnigova–Egerváryho věta, 1931)

V každém bipartitním grafu je velikost minimálního vrcholového pokrytí rovna velikosti maximálního párování.

Kőnigova–Egerváryho věta

Věta 7.1 (Kőnigova–Egerváryho věta, 1931)

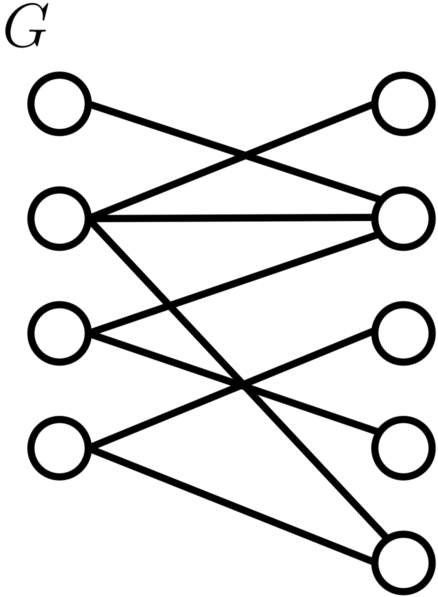
V každém bipartitním grafu je velikost minimálního vrcholového pokrytí rovna velikosti maximálního párování.

Obrázek: Dénes Kőnig (1884–1944) a Jenő Egerváry (1891–1958).

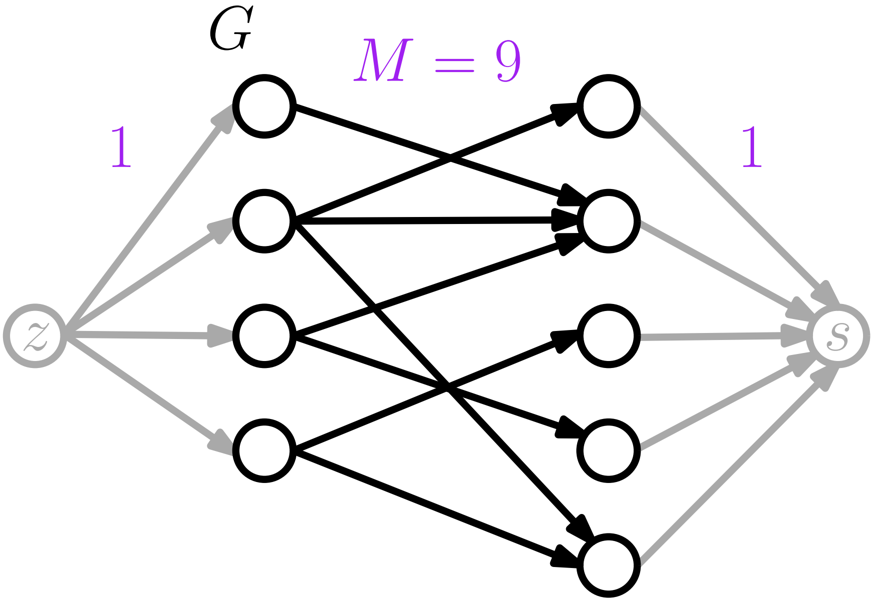
Zdroj: http://en.wikipedia.org

Kőnigova–Egerváryho věta: příklad

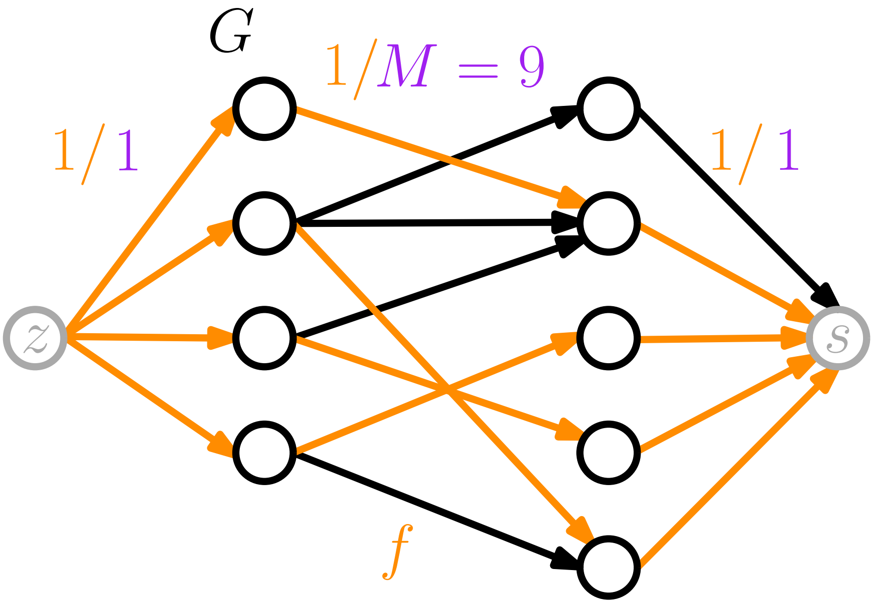
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



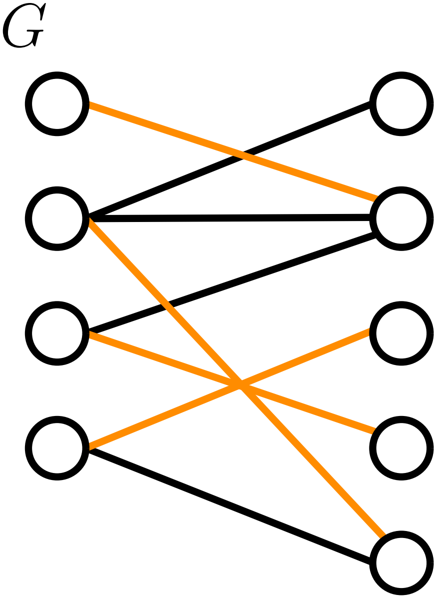
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



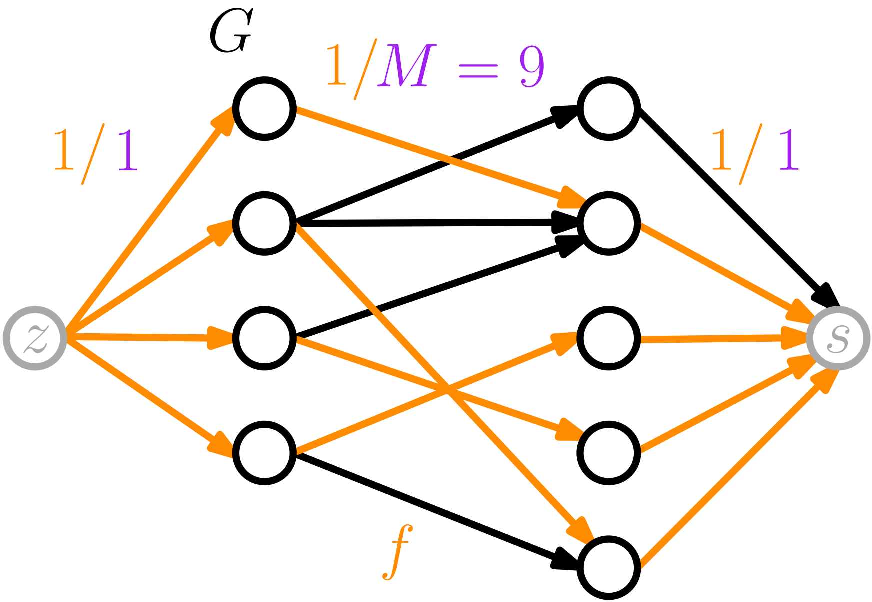
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



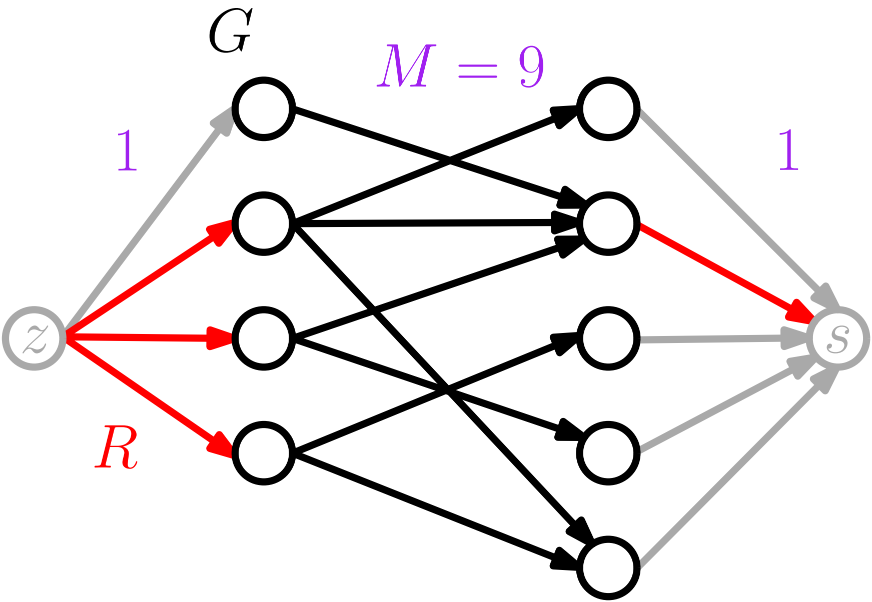
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



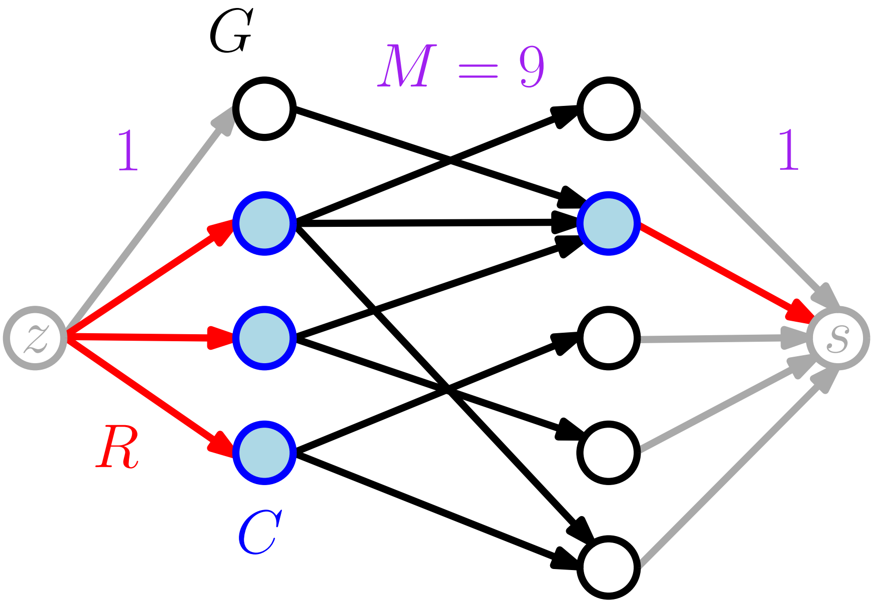
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



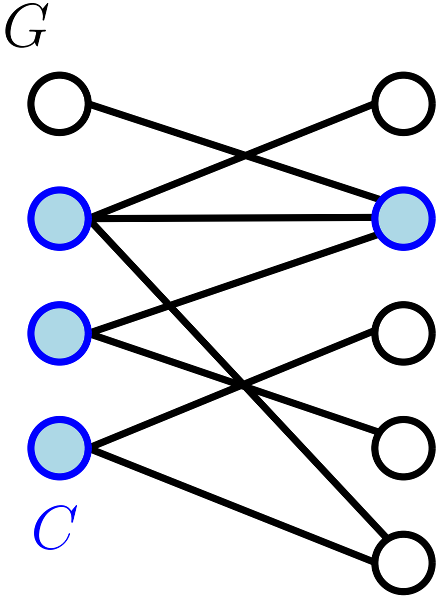
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



Hallova věta

Hallova věta

Věta 7.2 (Hallova věta, 1935)

Množinový systém $(M_i : i \in I)$ má systém různých reprezentantů právě tehdy, když pro každé $J \subseteq I$ platí $|\cup_{j \in J} M_j| \geq |J|$.

Hallova věta

Věta 7.2 (Hallova věta, 1935)

Množinový systém $(M_i : i \in I)$ má systém různých reprezentantů právě tehdy, když pro každé $J \subseteq I$ platí $|\cup_{j \in J} M_j| \geq |J|$.

Obrázek: Philip Hall (1904–1982).

Zdroj: http://en.wikipedia.org

Hallova věta

Věta 7.2 (Hallova věta, 1935)

Množinový systém $(M_i : i \in I)$ má systém různých reprezentantů právě tehdy, když pro každé $J \subseteq I$ platí $|\cup_{j \in J} M_j| \geq |J|$.

Obrázek: Philip Hall (1904–1982).

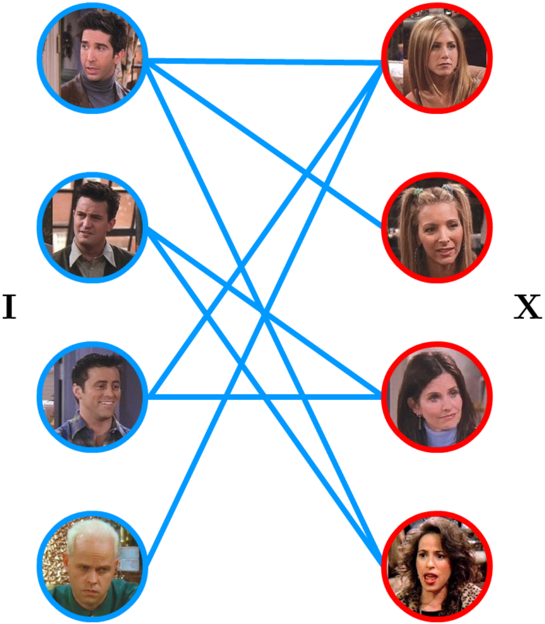
Zdroj: http://en.wikipedia.org

- V angličtině se tato věta nazývá „Hall's marriage theorem".

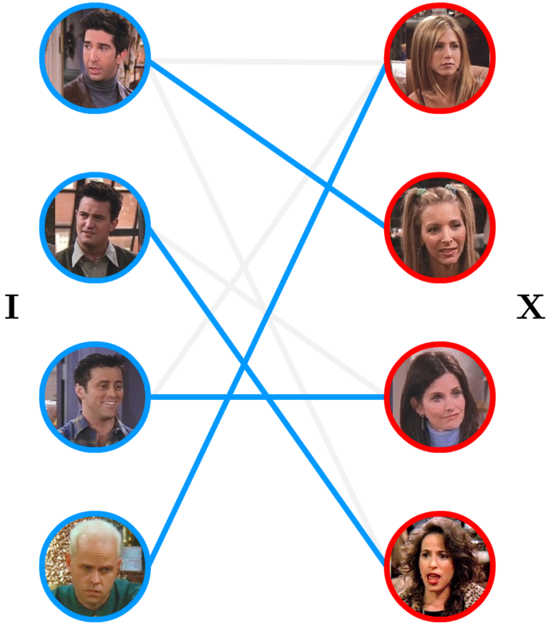
Hallova věta: příklad

Hallova věta: příklad

Hallova věta: příklad

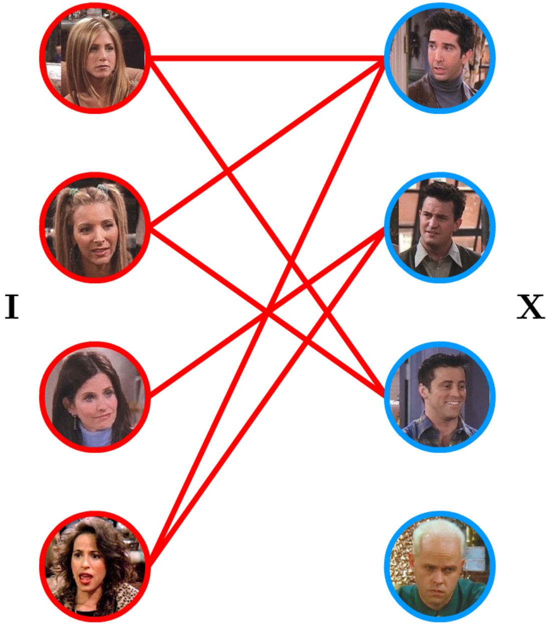


Hallova věta: příklad

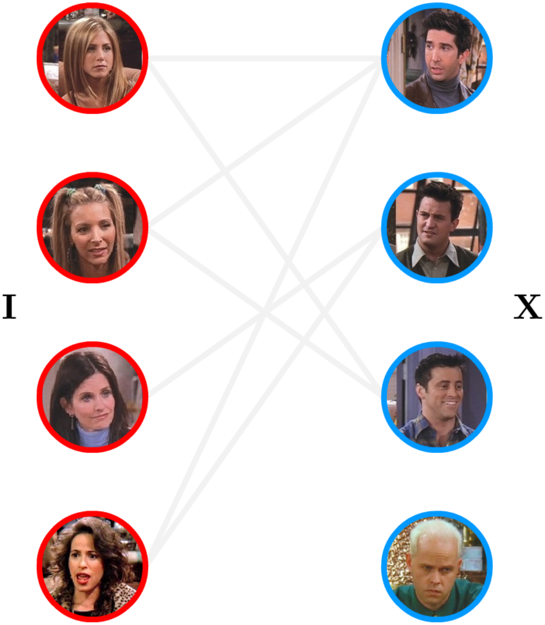


Hallova věta: příklad

Hallova věta: příklad



Hallova věta: příklad



Rozšiřování latinských obdélníků

Zdroj: www.britainexpress.com

Zdroj: www.britainexpress.com

Zdroj: www.britainexpress.com

Shall	wee	all	dye
wee	Shall	dye	all
all	dye	Shall	wee
dye	all	wee	Shall

Deska v St. Mawgan Church připomínající Hanniballa Basseta († 1709).

Zdroj: www.britainexpress.com

Shall	wee	all	dye
wee	Shall	dye	all
all	dye	Shall	wee
dye	all	wee	Shall

Deska v St. Mawgan Church připomínající Hanniballa Basseta († 1709).

Děkuji za pozornost.