

# Kombinatorika a grafy 1

Martin Balko

## 6. přednáška

9. listopadu 2022



# Toky v sítích

**A TEĎ NĚJAKÉ PRAKTICKÉ VYUŽITÍ**



imgflip.com

**MĚJME GRAF G...**



Zdroj: „Matfyz memes that will make you ČVUT“

# Motivace I: rozvod ropy

## Motivace I: rozvod ropy

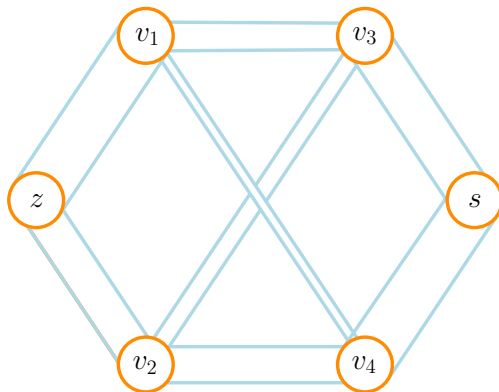
- Máme zdroj ropy a chceme ropu dostat do tankeru pomocí ropovodu.

## Motivace I: rozvod ropy

- Máme zdroj ropy a chceme ropu dostat do tankeru pomocí ropovodu.
- Různá potrubí mají různou šířku a tedy i maximální možnou kapacitu.

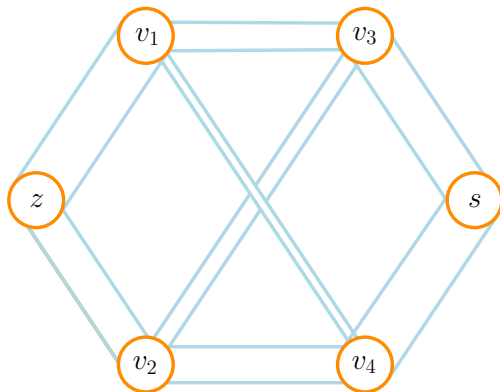
# Motivace I: rozvod ropy

- Máme **zdroj ropy** a chceme ropu dostat do **tankeru** pomocí ropovodu.
- Různá potrubí mají různou šířku a tedy i **maximální možnou kapacitu**.



# Motivace I: rozvod ropy

- Máme **zdroj ropy** a chceme ropu dostat do **tankeru** pomocí ropovodu.
- Různá potrubí mají různou šířku a tedy i **maximální možnou kapacitu**.

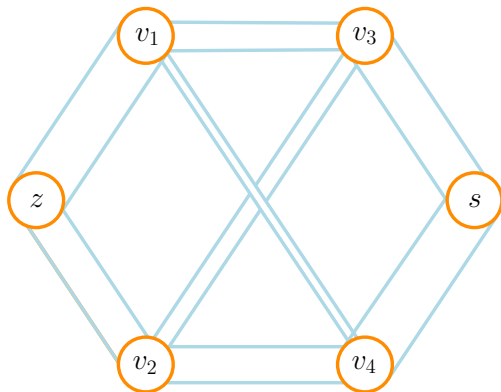


- Jak dostat do tankeru maximální množství ropy?



# Motivace I: rozvod ropy

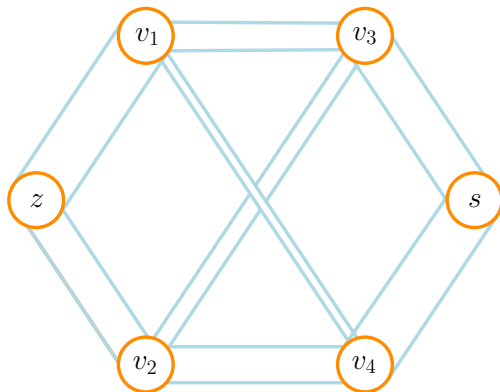
- Máme **zdroj ropy** a chceme ropu dostat do **tankeru** pomocí ropovodu.
- Různá potrubí mají různou šířku a tedy i **maximální možnou kapacitu**.



- Jak dostat do tankeru maximální množství ropy?
- Obecně **problém nalezení maximálního toku** ze zdroje do stoku za dodržení podmínek na kapacitu.

# Motivace I: rozvod ropy

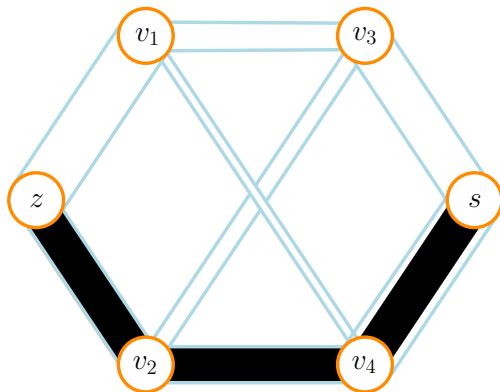
- Máme **zdroj ropy** a chceme ropu dostat do **tankeru** pomocí ropovodu.
- Různá potrubí mají různou šířku a tedy i **maximální možnou kapacitu**.



- Jak dostat do tankeru maximální množství ropy?
- Obecně **problém nalezení maximálního toku** ze zdroje do stoku za dodržení podmínek na kapacitu.
- Plánování letů, přenos dat, dopravní sítě, eliminace baseballových týmů.

# Motivace I: rozvod ropy

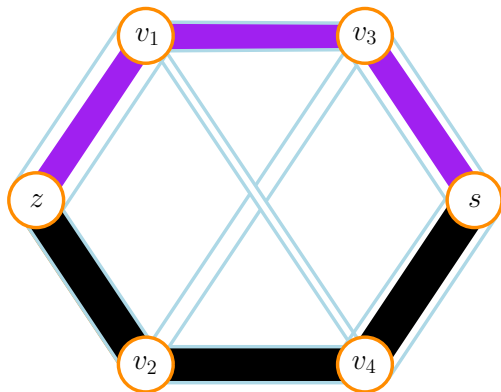
- Máme **zdroj ropy** a chceme ropu dostat do **tankeru** pomocí ropovodu.
- Různá potrubí mají různou šířku a tedy i **maximální možnou kapacitu**.



- Jak dostat do tankeru maximální množství ropy?
- Obecně **problém nalezení maximálního toku** ze zdroje do stoku za dodržení podmínek na kapacitu.
- Plánování letů, přenos dat, dopravní sítě, eliminace baseballových týmů.

# Motivace I: rozvod ropy

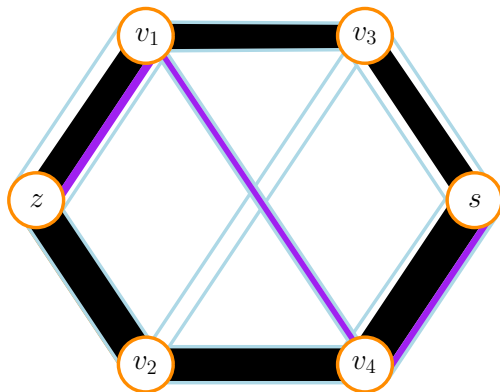
- Máme **zdroj ropy** a chceme ropu dostat do **tankeru** pomocí ropovodu.
- Různá potrubí mají různou šířku a tedy i **maximální možnou kapacitu**.



- Jak dostat do tankeru maximální množství ropy?
- Obecně **problém nalezení maximálního toku** ze zdroje do stoku za dodržení podmínek na kapacitu.
- Plánování letů, přenos dat, dopravní sítě, eliminace baseballových týmů.

# Motivace I: rozvod ropy

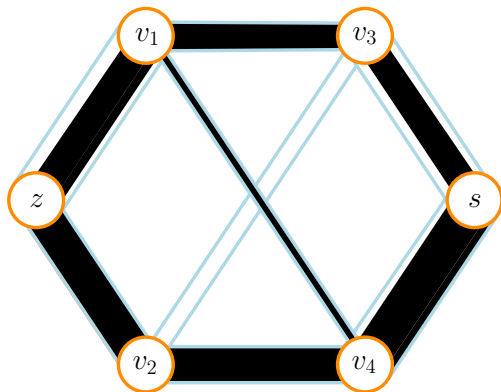
- Máme **zdroj ropy** a chceme ropu dostat do **tankeru** pomocí ropovodu.
- Různá potrubí mají různou šířku a tedy i **maximální možnou kapacitu**.



- Jak dostat do tankeru maximální množství ropy?
- Obecně **problém nalezení maximálního toku** ze zdroje do stoku za dodržení podmínek na kapacitu.
- Plánování letů, přenos dat, dopravní sítě, eliminace baseballových týmů.

# Motivace I: rozvod ropy

- Máme **zdroj ropy** a chceme ropu dostat do **tankeru** pomocí ropovodu.
- Různá potrubí mají různou šířku a tedy i **maximální možnou kapacitu**.



- Jak dostat do tankeru maximální množství ropy?
- Obecně **problém nalezení maximálního toku** ze zdroje do stoku za dodržení podmínek na kapacitu.
- Plánování letů, přenos dat, dopravní sítě, eliminace baseballových týmů.

## Motivace II: bombardování železnic východního bloku

## Motivace II: bombardování železnic východního bloku

- Chceme přerušit železniční spojení mezi **startovní** a **cílovou destinací**.

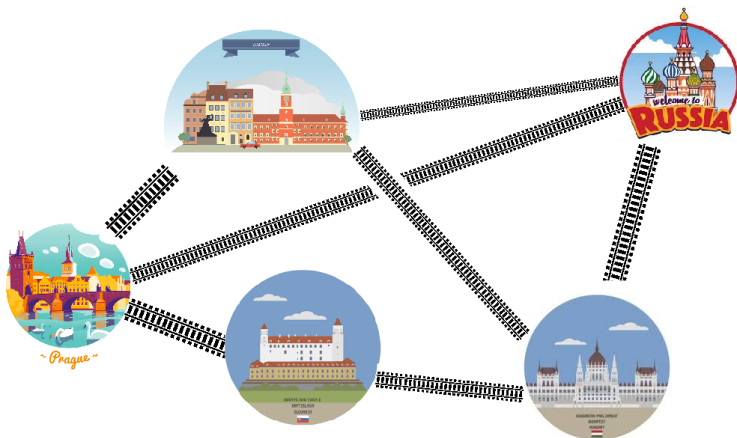


## Motivace II: bombardování železnic východního bloku

- Chceme přerušit železniční spojení mezi **startovní** a **cílovou destinací**.
- Některé spoje jsou frekventovanější a je tedy obtížnější přerušit.

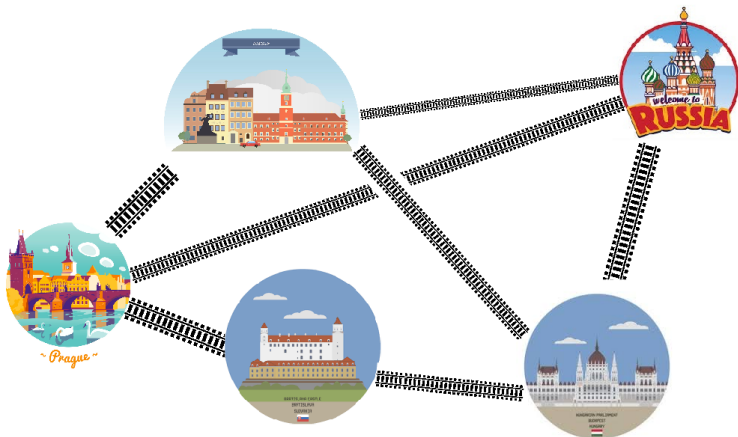
## Motivace II: bombardování železnic východního bloku

- Chceme přerušit železniční spojení mezi **startovní** a **cílovou destinací**.
- Některé spoje jsou frekventovanější a je tedy obtížnější přerušit.



## Motivace II: bombardování železnic východního bloku

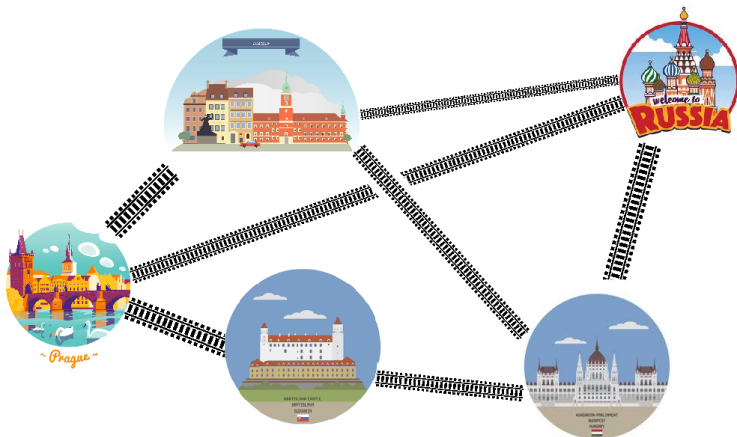
- Chceme přerušit železniční spojení mezi **startovní** a **cílovou destinací**.
- Některé spoje jsou frekventovanější a je tedy obtížnější přerušit.



- Jak přerušit danou síť je za použití minimálního počtu bomb?

## Motivace II: bombardování železnic východního bloku

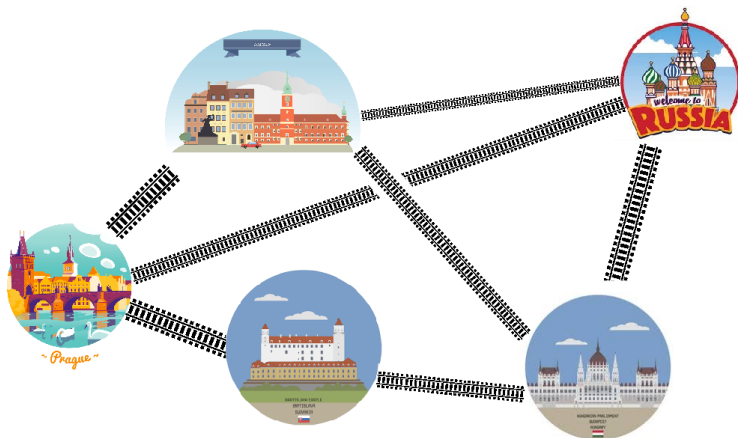
- Chceme přerušit železniční spojení mezi **startovní** a **cílovou destinací**.
- Některé spoje jsou frekventovanější a je tedy obtížnější přerušit.



- Jak přerušit danou síť je za použití minimálního počtu bomb?
- Původní motivace pro studium maximálních toků (Harris a Ross).

## Motivace II: bombardování železnic východního bloku

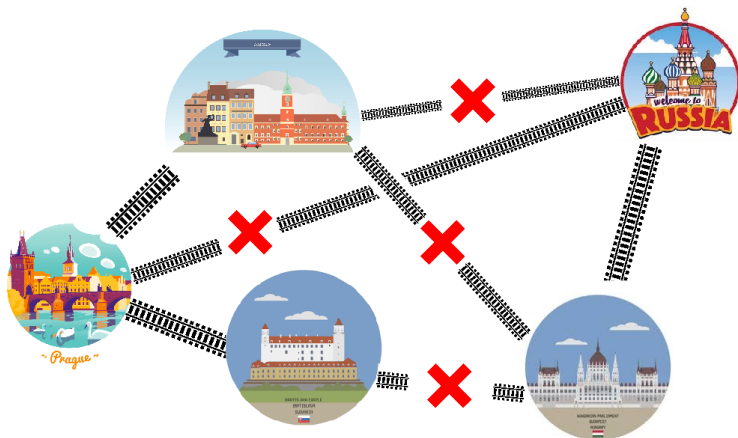
- Chceme přerušit železniční spojení mezi **startovní** a **cílovou destinací**.
- Některé spoje jsou frekventovanější a je tedy obtížnější přerušit.



- Jak přerušit danou síť je za použití minimálního počtu bomb?
- Původní motivace pro studium maximálních toků (Harris a Ross).
- Obecně **problém nalezení minimálního řezu** v dané síti.

## Motivace II: bombardování železnic východního bloku

- Chceme přerušit železniční spojení mezi **startovní** a **cílovou destinací**.
- Některé spoje jsou frekventovanější a je tedy obtížnější přerušit.



- Jak přerušit danou síť je za použití minimálního počtu bomb?
- Původní motivace pro studium maximálních toků (Harris a Ross).
- Obecně **problém nalezení minimálního řezu** v dané síti.

# AD 93458

## Armed Services Technical Information Agency

Reproduced by  
**DOCUMENT SERVICE CENTER**  
KNOTT BUILDING DAYTON, 2, OHIO

This document is the property of the Government. It is furnished for the duration of the contract and shall be returned when no longer required, or upon recall by ASTIA to the following address: Armed Services Technical Information Agency, Document Service Center, Knott Building, Dayton 2, Ohio.

**NOTICE: WHEN GOVERNMENT OR OTHER DRAWINGS, SPECIFICATIONS OR OTHER DATA ARE USED FOR ANY PURPOSE OTHER THAN IN CONNECTION WITH A DEFINITELY RELATED GOVERNMENT PROCUREMENT OPERATION, THE U. S. GOVERNMENT THEREBY INCURS NO RESPONSIBILITY, NOR ANY OBLIGATION WHATSOEVER, AND THE FACT THAT THE GOVERNMENT MAY HAVE FORMULATED, FURNISHED, OR IN ANY WAY SUPPLIED THE SAID DRAWINGS, SPECIFICATIONS, OR OTHER DATA IS NOT TO BE REGARDED BY IMPLICATION OR OTHERWISE AS IN ANY MANNER LICENSING THE HOLDER OR ANY OTHER PERSON OR CORPORATION, OR CONVEYING ANY RIGHTS OR PERMISSION TO MANUFACTURE, USE OR SELL ANY PATENTED INVENTION THAT MAY IN ANY WAY BE RELATED THERETO.**

SECRET

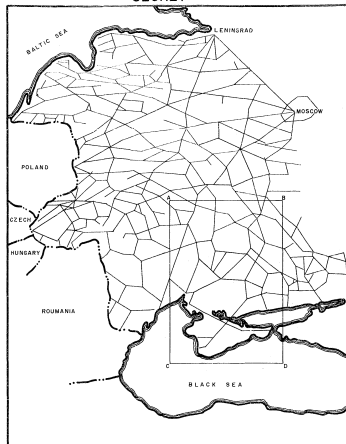


Fig. 3—Schematic diagram of the railway operating divisions of western Russia

This figure is a tracing of Figure 1 in so far as the actual rail net is concerned. The several railway operating divisions, however, are shown in colors. The outlined area, A, B, C, and D, is enlarged in Figure 4 to illustrate the method of computing the number of trains each way per day which neighboring divisions can concurrently pass and receive. Estimating the track capacities still remains the task of an expert.

SECRET

RM 1573-3

Obrázek: Hledání minimálního řezu v železniční síti východního bloku.

Zdroj: Fundamentals of a method for evaluating rail net capacities (T.E. Harris a F.S. Ross)

# Fordův–Fulkersonův algoritmus



# Fordův–Fulkersonův algoritmus

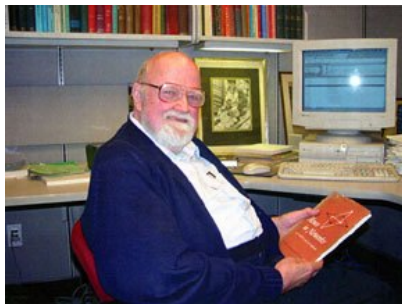
- Dnes si ukážeme algoritmus, který řeší oba problémy.

# Fordův–Fulkersonův algoritmus

- Dnes si ukážeme algoritmus, který řeší oba problémy.
- Uvidíme, že hledání max. toku a min. řezu v síti jsou **duální problémy**.

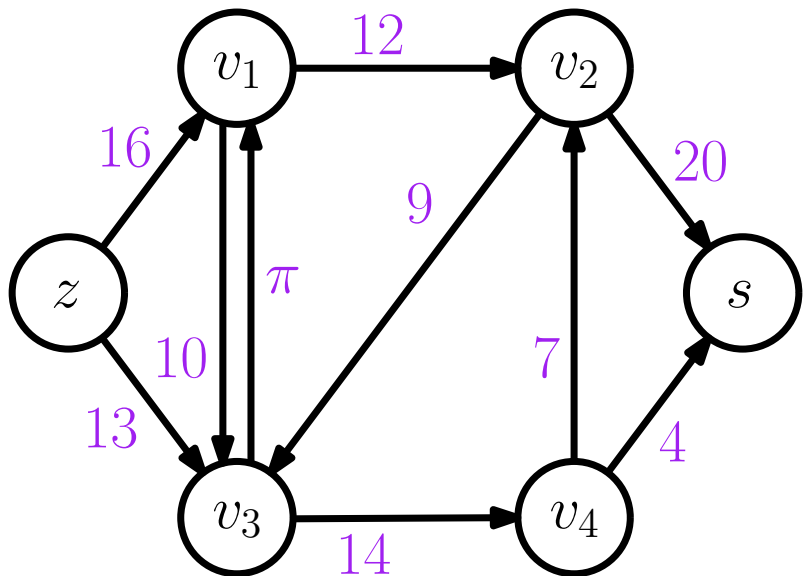
# Fordův–Fulkersonův algoritmus

- Dnes si ukážeme algoritmus, který řeší oba problémy.
- Uvidíme, že hledání max. toku a min. řezu v síti jsou **duální problémy**.

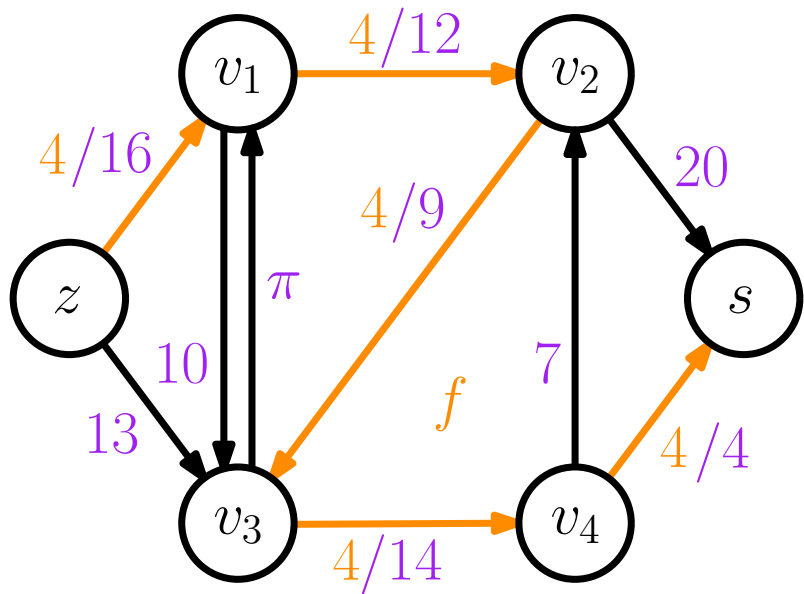


Obrázek: Lester R. Ford Jr. (1927–2017) a Delbert R. Fulkerson (1924–1976).

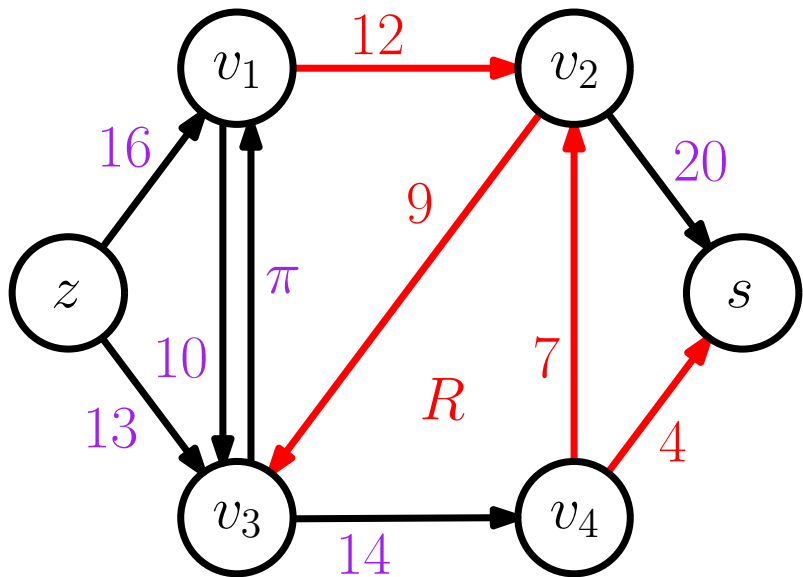
## Příklad síť



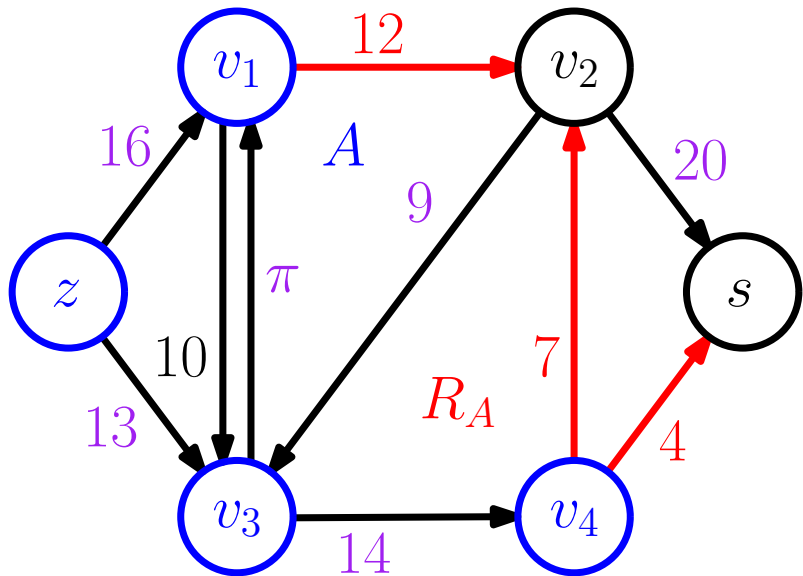
Příklad toku  $f$  s  $w(f) = 4$



Příklad řezu  $R$  s  $c(R) = 32$



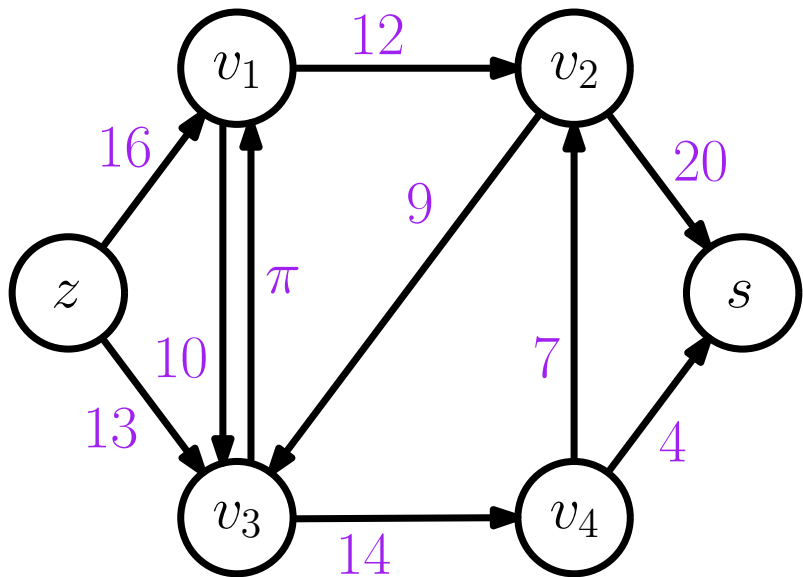
Příklad elementárního řezu  $R_A$  s  $c(R_A) = 23$



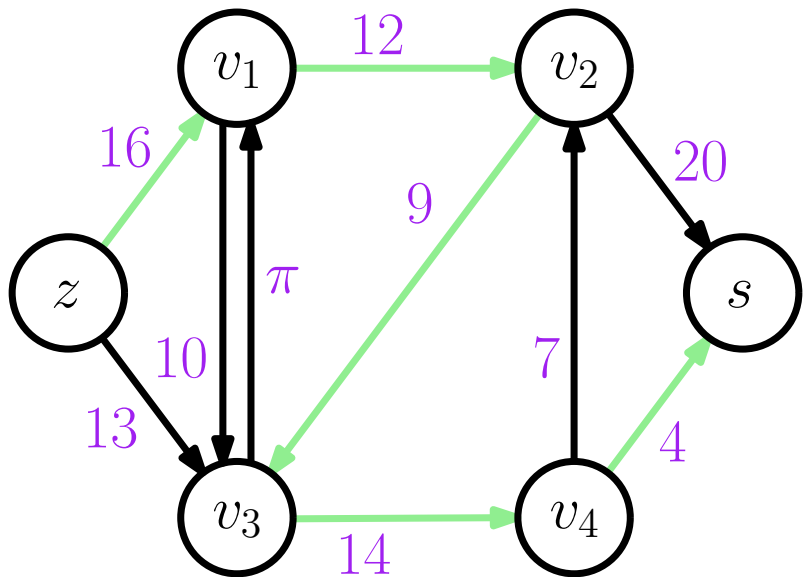
## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu



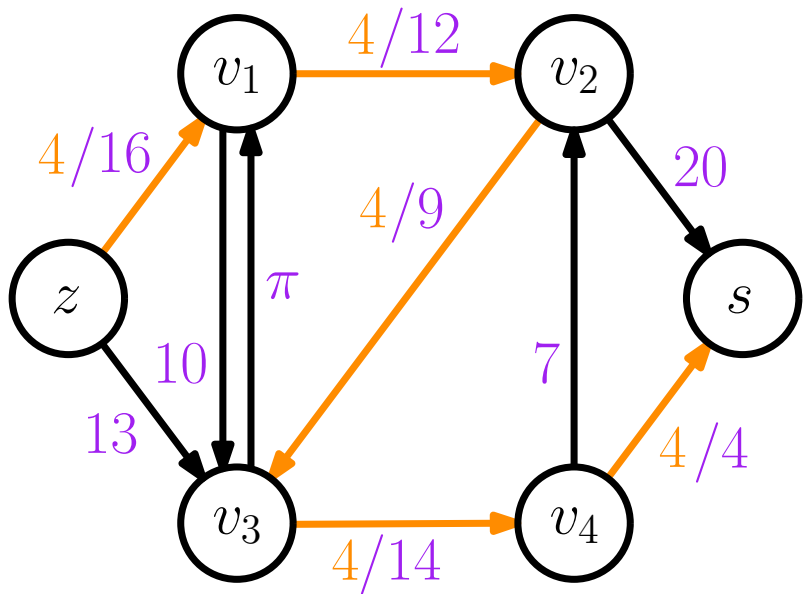
## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu



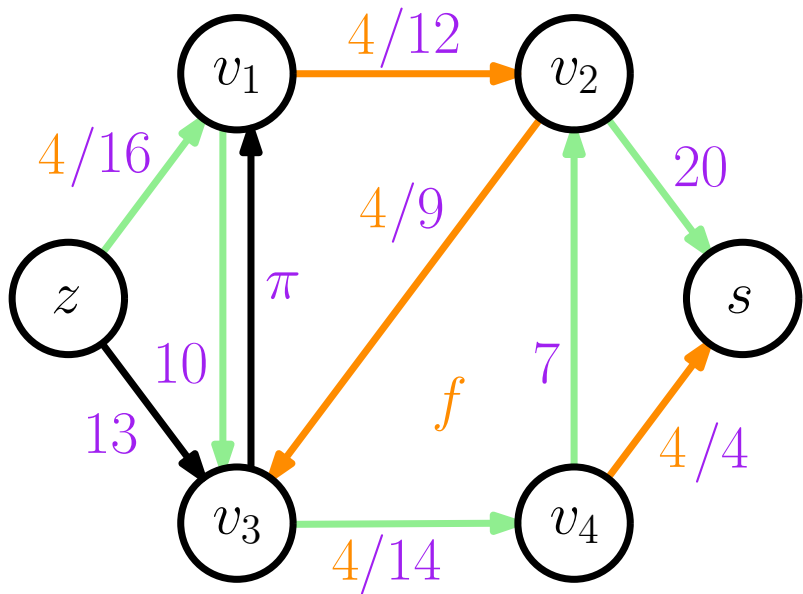
## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu



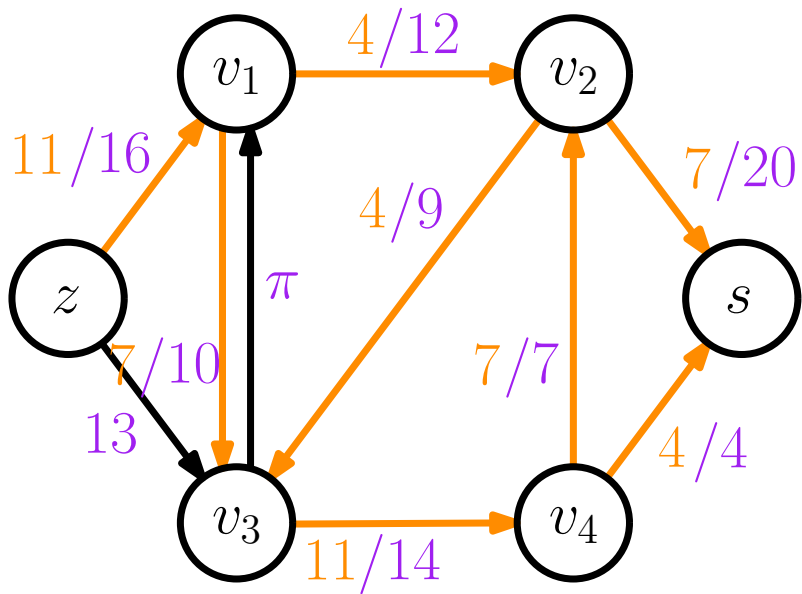
## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu



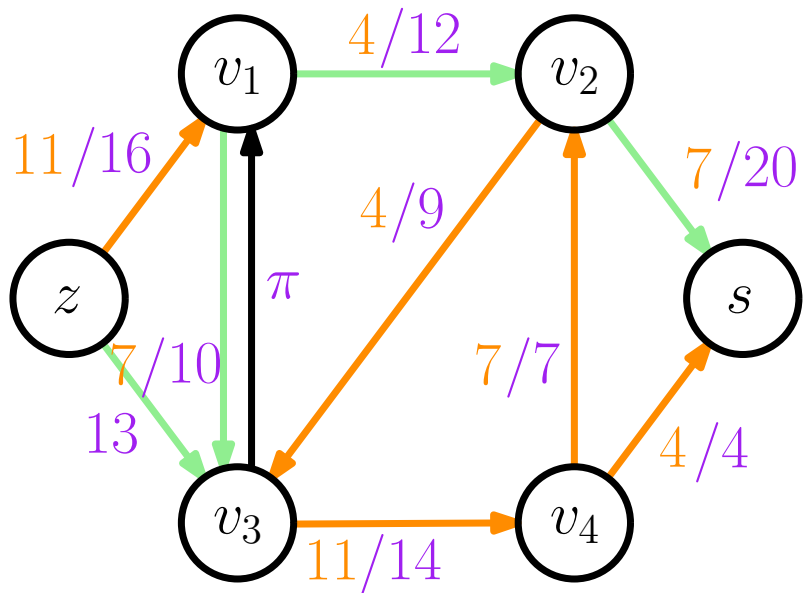
## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu



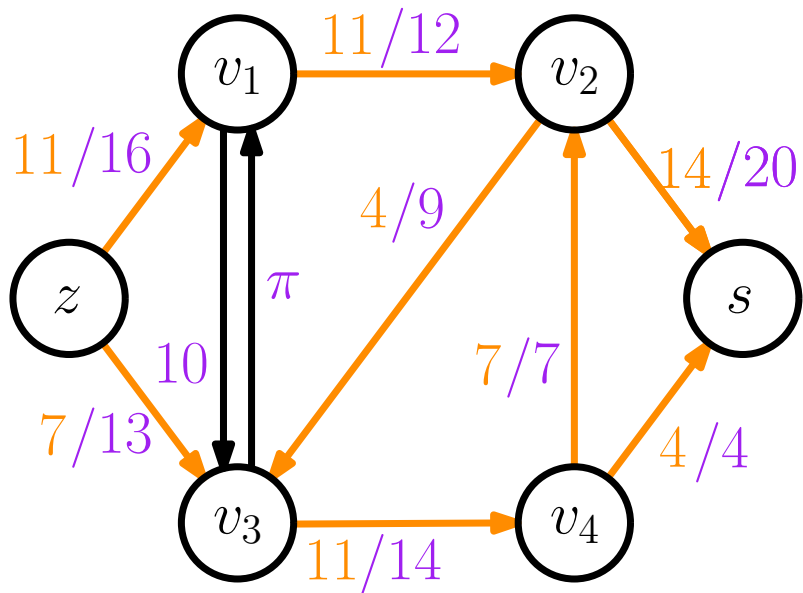
## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu



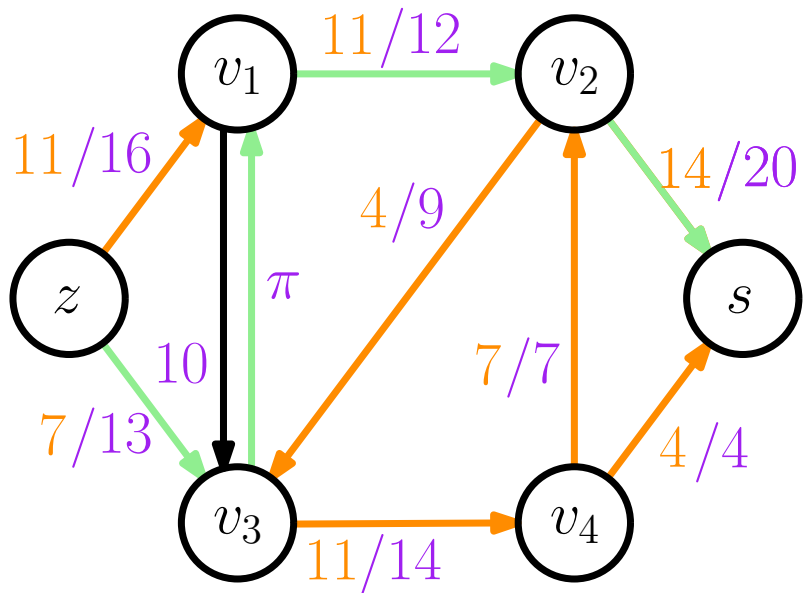
## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu



## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu

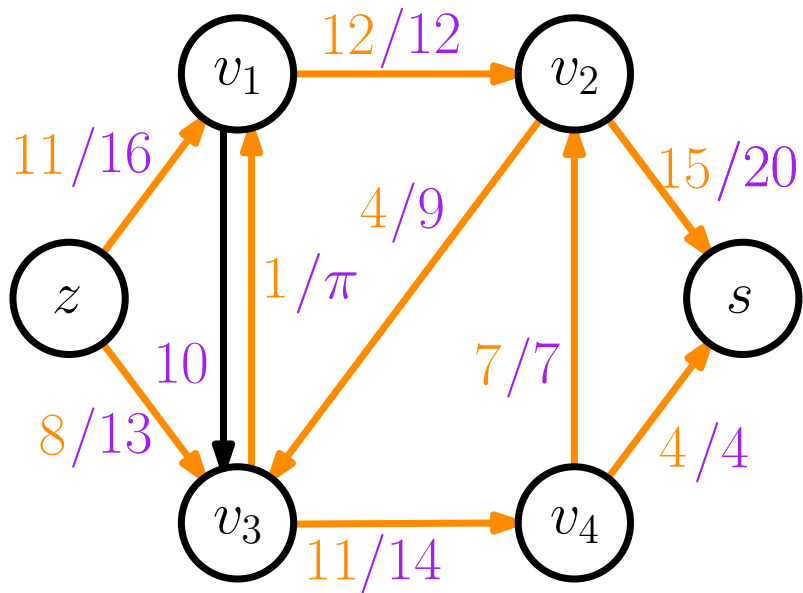


## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu

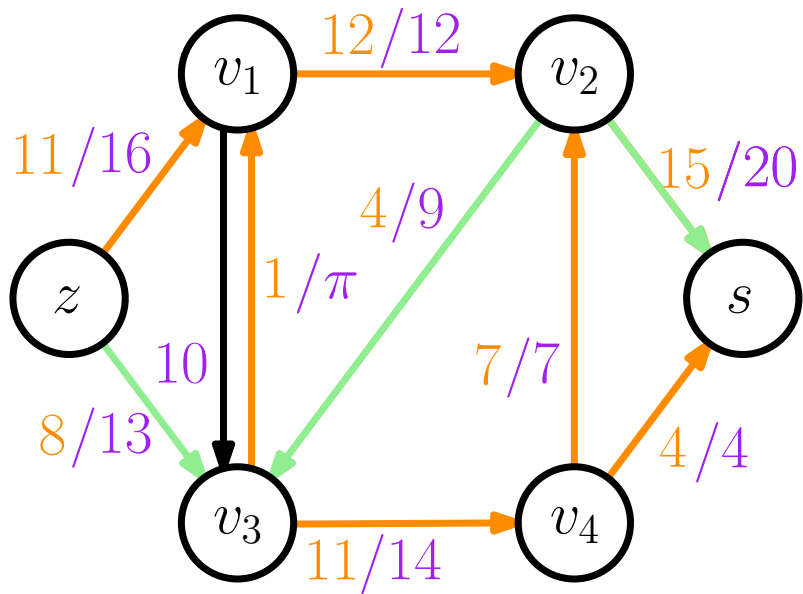




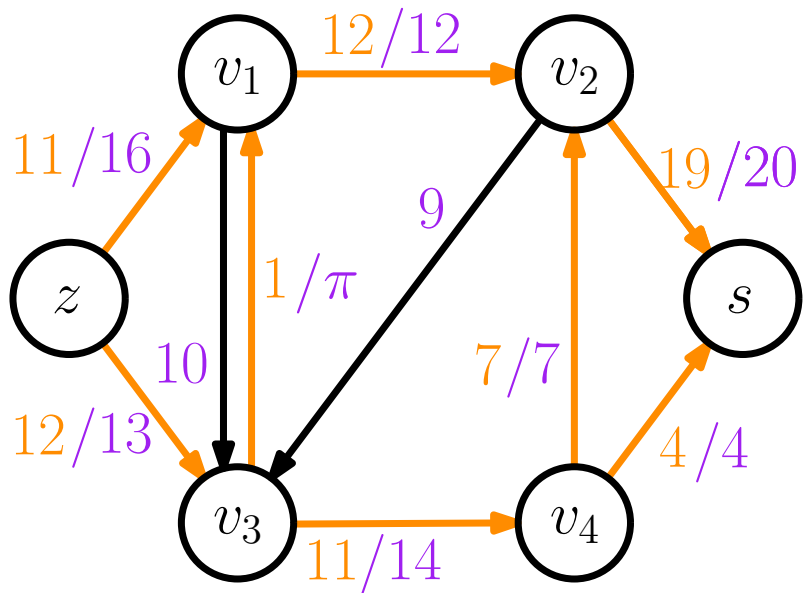
## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu



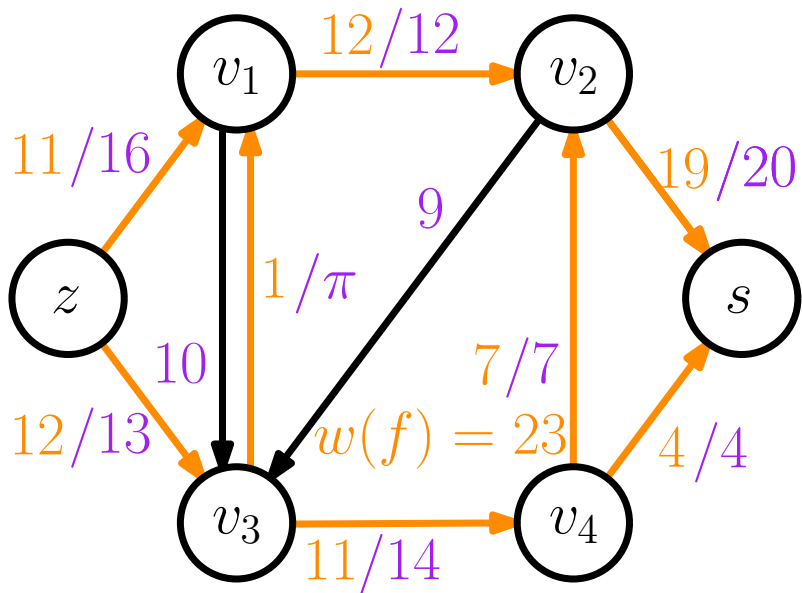
## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu



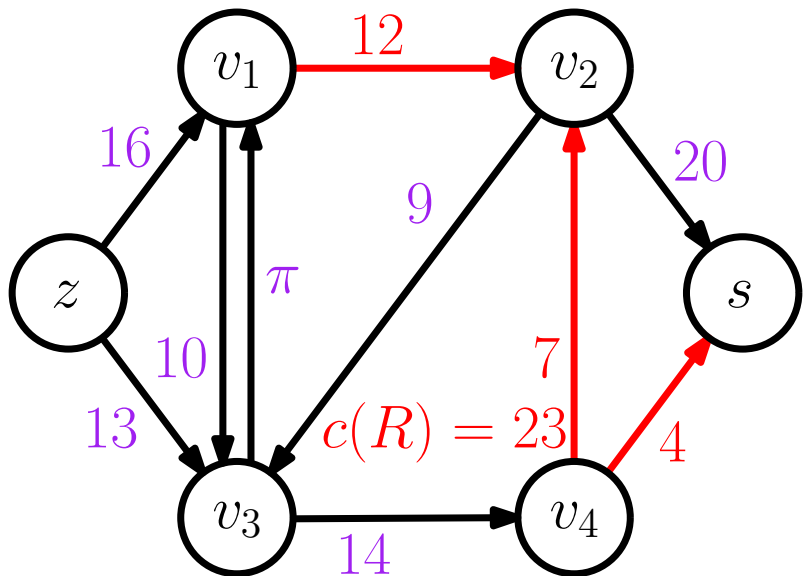
## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu

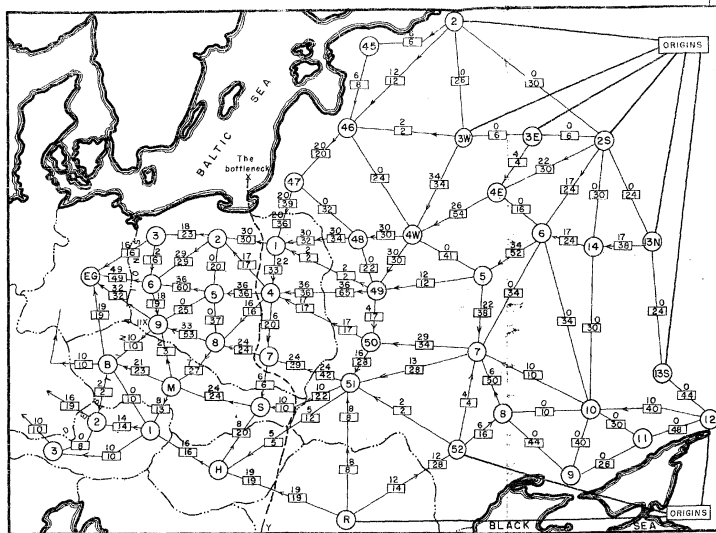


## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu



## Příklad běhu Fordova–Fulkersonova algoritmu

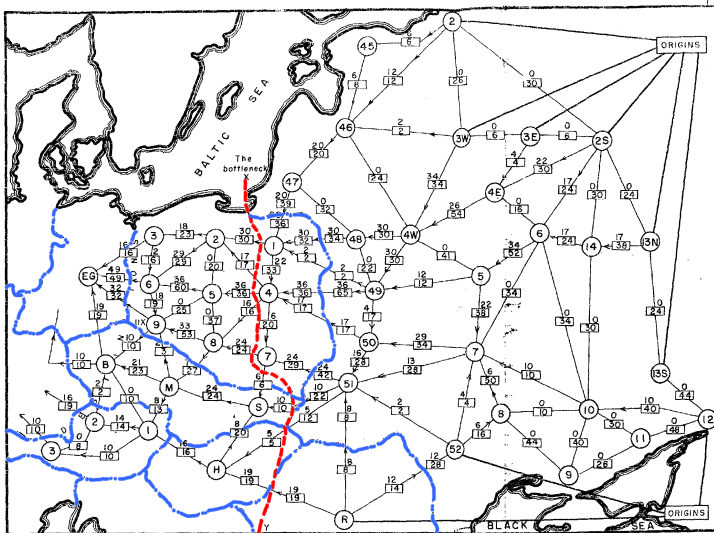




Obrázek: Minimální řez v železniční síti východního bloku.

Zdroj: Fundamentals of a method for evaluating rail net capacities (T.E. Harris a F.S. Ross)





Obrázek: Minimální řez v železniční síti východního bloku.

Zdroj: Fundamentals of a method for evaluating rail net capacities (T.E. Harris a F.S. Ross)

Děkuji za pozornost.