

Kombinatorika a grafy I

Martin Balko

3. přednáška

19. října 2022



Vytvořující funkce a jejich aplikace

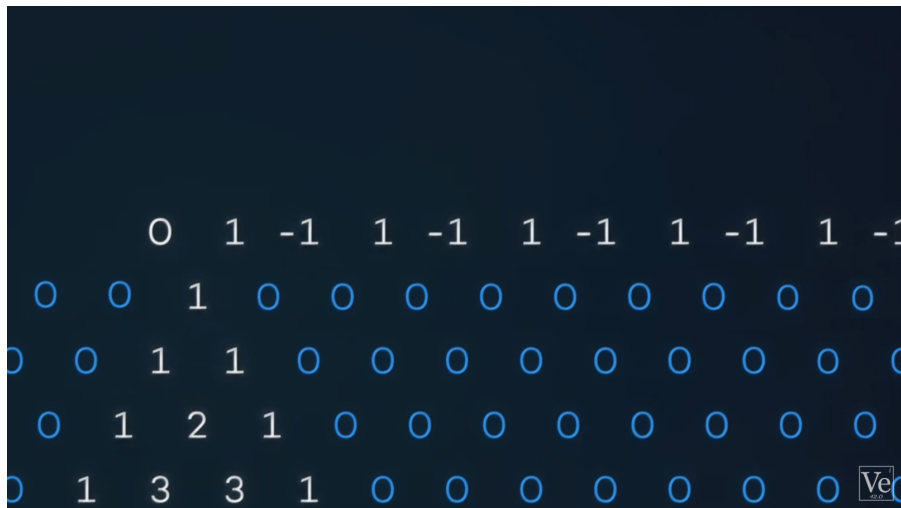
Rozšíření Pascalova trojúhelníku

$$\begin{array}{r} (1+x)^2 = 1 + 2x + 1x^2 \\ (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + 1x^3 \\ (1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4 \\ (1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + 1x^5 \\ (1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + 1x^6 \\ (1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + 1x^7 \end{array}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7

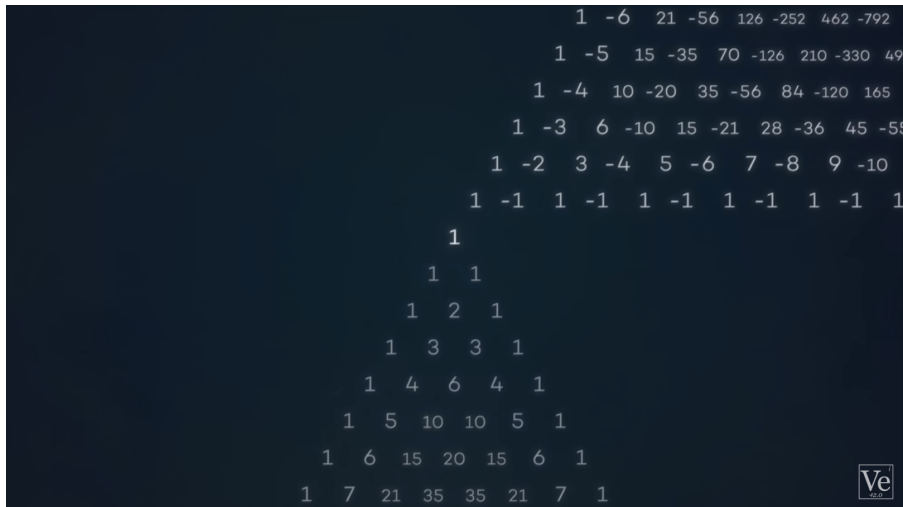
Zdroj: Youtube (Veritasium: The Discovery That Transformed Pi)

Rozšíření Pascalova trojúhelníku



Zdroj: Youtube (Veritasium: The Discovery That Transformed Pi)

Rozšíření Pascalova trojúhelníku



Zdroj: Youtube (Veritasium: The Discovery That Transformed Pi)

Rozšíření Pascalova trojúhelníku



Zdroj: Youtube (Veritasium: The Discovery That Transformed Pi)

Binární zakořeněné stromy

- Příklady binárních zakořeněných stromů $s \leq 4$ vrcholy:

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 1$$



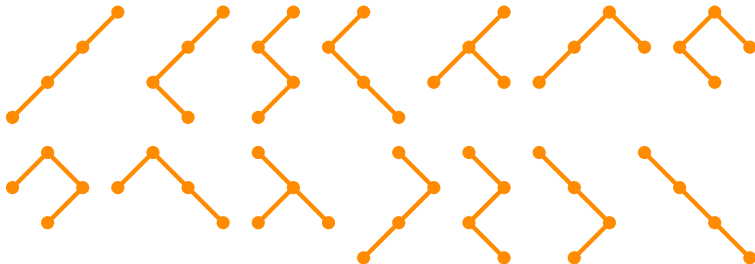
$$b_2 = 2$$



$$b_3 = 5$$



$$b_4 = 14$$



Catalanova čísla

Catalanova čísla

- Definována jako $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ pro $n \geq 0$.

Catalanova čísla

- Definována jako $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ pro $n \geq 0$.
- **Hodnoty:** 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, ...

Catalanova čísla

- Definována jako $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ pro $n \geq 0$.
- **Hodnoty:** 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, ...
- Objevil je **Leonhard Euler** v roce 1751.



Obrázek: **Leonhard Euler** (1707–1783) a **Eugène C. Catalan** (1814–1894).

Catalanova čísla

- Definována jako $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ pro $n \geq 0$.
- **Hodnoty:** 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, ...
- Objevil je **Leonhard Euler** v roce 1751.



Obrázek: **Leonhard Euler** (1707–1783) a **Eugène C. Catalan** (1814–1894).

Zdroj: <http://en.wikipedia.org>

- Je známo **přes 200 interpretací**: <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec>

Interpretace Catalanových čísel I

- Platí $C_n =$ počet triangulací $(n + 2)$ -gonu.

$$C_1 = 1$$



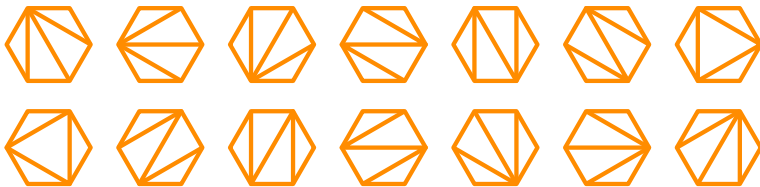
$$C_2 = 2$$



$$C_3 = 5$$



$$C_4 = 14$$



Interpretace Catalanových čísel II

- Platí C_n = počet správných uzávorkování s n páry závorek.

$$C_1 = 1 \quad ()$$

$$C_2 = 2 \quad ()() \quad (())$$

$$C_3 = 5 \quad ()()() \quad ()(()) \quad (())() \quad (())() \quad ((()))$$

$$C_4 = 14 \quad \begin{array}{cccc} ()()()() & (())()() & ()(())() & ()()()() \\ ()((())) & (())()() & (((()))) & ((()))() \\ ((())()) & ()(())() & (())()() & ()(())() \\ & (((())()) & (((()))) & \end{array}$$

Interpretace Catalanových čísel III

- Platí $C_n =$ počet Dyckových cest v $(n+1) \times (n+1)$ mřížce (= schodišť pod diagonálou).

$$C_1 = 1$$



$$C_2 = 2$$



$$C_3 = 5$$

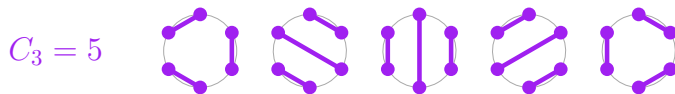


$$C_4 = 14$$



Interpretace Catalanových čísel IV

- Platí C_n = počet způsobů, jak si $2n$ lidí u stolu může potřást rukama, aniž by došlo ke křížení.



Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na **liché** sčítance.

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na **liché** sčítance.

$$3 = 3 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_3 = 2,$$

$$4 = 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_4 = 2,$$

$$5 = 5 = 3 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_5 = 3,$$

$$6 = 5 + 1 = 3 + 3 = 3 + 1 + 1 + 1 = 1 + \dots + 1 \Rightarrow l_6 = 4.$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na **liché** sčítance.

$$3 = 3 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_3 = 2,$$

$$4 = 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_4 = 2,$$

$$5 = 5 = 3 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_5 = 3,$$

$$6 = 5 + 1 = 3 + 3 = 3 + 1 + 1 + 1 = 1 + \dots + 1 \Rightarrow l_6 = 4.$$

- Buď r_n počet neuspořádaných rozkladů n na **různé** sčítance.

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na **liché** sčítance.

$$3 = 3 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_3 = 2,$$

$$4 = 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_4 = 2,$$

$$5 = 5 = 3 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_5 = 3,$$

$$6 = 5 + 1 = 3 + 3 = 3 + 1 + 1 + 1 = 1 + \dots + 1 \Rightarrow l_6 = 4.$$

- Buď r_n počet neuspořádaných rozkladů n na **různé** sčítance.

$$3 = 3 = 2 + 1 \Rightarrow r_3 = 2,$$

$$4 = 4 = 3 + 1 \Rightarrow r_4 = 2,$$

$$5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 \Rightarrow r_5 = 3,$$

$$6 = 6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 2 + 1 \Rightarrow r_6 = 4,$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na **liché** sčítance.

$$3 = 3 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_3 = 2,$$

$$4 = 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_4 = 2,$$

$$5 = 5 = 3 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_5 = 3,$$

$$6 = 5 + 1 = 3 + 3 = 3 + 1 + 1 + 1 = 1 + \dots + 1 \Rightarrow l_6 = 4.$$

- Buď r_n počet neuspořádaných rozkladů n na **různé** sčítance.

$$3 = 3 = 2 + 1 \Rightarrow r_3 = 2,$$

$$4 = 4 = 3 + 1 \Rightarrow r_4 = 2,$$

$$5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 \Rightarrow r_5 = 3,$$

$$6 = 6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 2 + 1 \Rightarrow r_6 = 4,$$

Věta

Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $l_n = r_n$.

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na **liché** sčítance.

$$3 = 3 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_3 = 2,$$

$$4 = 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_4 = 2,$$

$$5 = 5 = 3 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \Rightarrow l_5 = 3,$$

$$6 = 5 + 1 = 3 + 3 = 3 + 1 + 1 + 1 = 1 + \dots + 1 \Rightarrow l_6 = 4.$$

- Buď r_n počet neuspořádaných rozkladů n na **různé** sčítance.

$$3 = 3 = 2 + 1 \Rightarrow r_3 = 2,$$

$$4 = 4 = 3 + 1 \Rightarrow r_4 = 2,$$

$$5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 \Rightarrow r_5 = 3,$$

$$6 = 6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 2 + 1 \Rightarrow r_6 = 4,$$

Věta

Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $l_n = r_n$.

- Stačí ukázat $l(x) = r(x)$, kde $l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n$ a $r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$.

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \dots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1+x}{1} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \dots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1+x}{1} \cdot \frac{1+x^2}{1} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \dots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1+x}{1} \cdot \frac{1+x^2}{1} \cdot \frac{1+x^3}{1} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \dots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1+x}{1} \cdot \frac{1+x^2}{1} \cdot \frac{1+x^3}{1} \cdot \frac{1+x^4}{1} \dots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \dots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \dots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \dots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \dots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \dots = r(x).$$

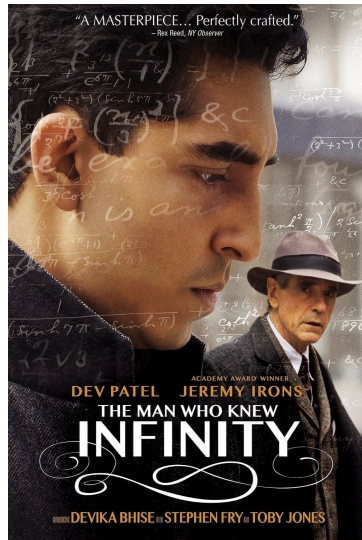
Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned}l(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \dots\end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \dots = r(x).$$



Obrázek: G. H. Hardy (1877–1947) a Srinivasa Ramanujan (1887–1920).

Zdroje: <https://imdb.com> a <https://www.insidescience.org>

Děkuji za pozornost.