

Kombinatorika a grafy 1

Martin Balko

2. přednáška

12. října 2022



Vytvořující funkce

Příklad ze života

Příklad ze života

- Kolika způsoby můžeme naplnit košík $n \in \mathbb{N}_0$ kousky ovoce tak, aby:
 - počet **jablek** byl sudý,
 - počet **švestek** byl násobek pěti,
 - v košíku byly nanejvýš čtyři **pomeranče**
 - a nanejvýš jedno **avokádo**?



Zdroj: <https://123RF.com>

Příklad ze života

- Kolika způsoby můžeme naplnit košík $n \in \mathbb{N}_0$ kousky ovoce tak, aby:
 - počet **jablek** byl sudý,
 - počet **švestek** byl násobek pěti,
 - v košíku byly nanejvýš čtyři **pomeranče**
 - a nanejvýš jedno **avokádo**?



Zdroj: <https://123RF.com>

- Zajímá nás koeficient u x^n v mocninné řadě

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + x + \dots + x^4)(1 + x).$$

Příklad ze života

- Kolika způsoby můžeme naplnit košík $n \in \mathbb{N}_0$ kousky ovoce tak, aby:
 - počet **jablek** byl sudý,
 - počet **švestek** byl násobek pěti,
 - v košíku byly nanejvýš čtyři **pomeranče**
 - a nanejvýš jedno **avokádo**?



Zdroj: <https://123RF.com>

- Zajímá nás koeficient u x^n v mocninné řadě

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + x + \dots + x^4)(1 + x).$$

- Se znalostmi z dnešní přednášky budeme schopni najít odpověď:

Příklad ze života

- Kolika způsoby můžeme naplnit košík $n \in \mathbb{N}_0$ kousky ovoce tak, aby:
 - počet **jablek** byl sudý,
 - počet **švestek** byl násobek pěti,
 - v košíku byly nanejvýš čtyři **pomeranče**
 - a nanejvýš jedno **avokádo**?



Zdroj: <https://123RF.com>

- Zajímá nás koeficient u x^n v mocninné řadě

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + x + \dots + x^4)(1 + x).$$

- Se znalostmi z dnešní přednášky budeme schopni najít odpověď: $n + 1$.

Základní operace s mocninnými řadami

$$a(x) + b(x) \quad (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

$$\alpha a(x) \quad (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$$

$$x^n a(x) \quad (0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots) \quad (n \text{ nul na začátku})$$

$$\frac{a(x) - a_0 - \dots - a_{n-1}x^{n-1}}{x^n} \quad (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$$

$$a(\alpha x) \quad (a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^i a_i, \dots)$$

$$a(x^n) \quad (a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots) \quad (\text{střídavě } n - 1 \text{ nul})$$

$$a'(x) \quad (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, ia_i, \dots)$$

$$\int_0^x a(t) dt \quad (0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_i}{i+1}, \dots)$$

$$a(x)b(x) \quad (c_0, c_1, c_2, \dots), \text{ kde } c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

K příkladu ze života

K příkladu ze života



Zdroj: <https://123RF.com>

- Zajímá nás koeficient a_n v mocninné řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + \dots + x^4)(1 + x)$$

K příkladu ze života



Zdroj: <https://123RF.com>

- Zajímá nás koeficient a_n v mocninné řadě

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + \dots + x^4)(1 + x) \\ &= \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot (1 + x)\end{aligned}$$

K příkladu ze života



Zdroj: <https://123RF.com>

- Zajímá nás koeficient a_n v mocninné řadě

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + \dots + x^4)(1 + x) \\ &= \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot (1 + x) = \frac{1}{(1 - x)^2}.\end{aligned}$$

K příkladu ze života



Zdroj: <https://123RF.com>

- Zajímá nás koeficient a_n v mocninné řadě

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + \dots + x^4)(1 + x) \\ &= \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot (1 + x) = \frac{1}{(1 - x)^2}.\end{aligned}$$

- Platí $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ a tedy podle operace derivace máme koeficient

K příkladu ze života



Zdroj: <https://123RF.com>

- Zajímá nás koeficient a_n v mocninné řadě

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots)(1 + \dots + x^4)(1 + x) \\ &= \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot (1 + x) = \frac{1}{(1 - x)^2}.\end{aligned}$$

- Platí $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ a tedy podle operace derivace máme koeficient
 $a_n = n + 1.$

Fibonacciho čísla

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).

Fibonacciho čísla

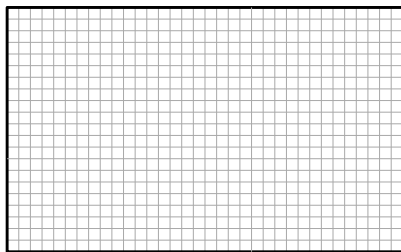
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$

Fibonacciho čísla

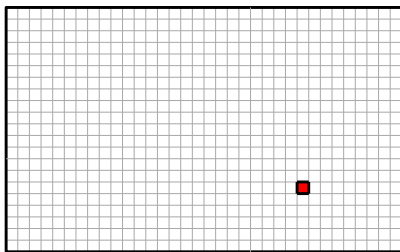
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

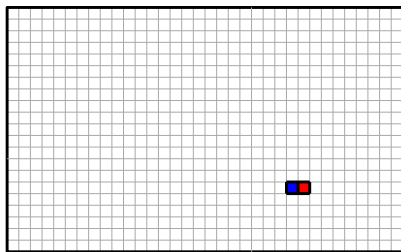
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

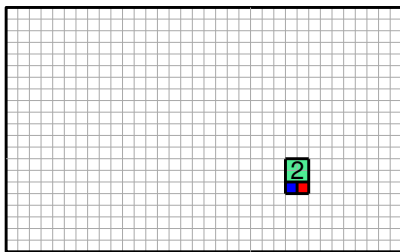
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

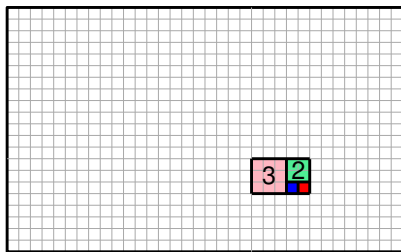
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

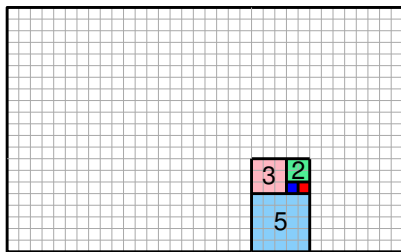
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

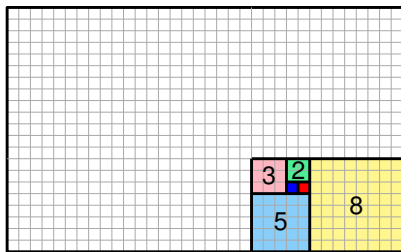
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

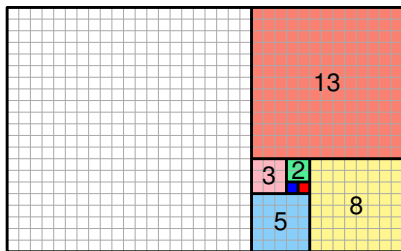
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

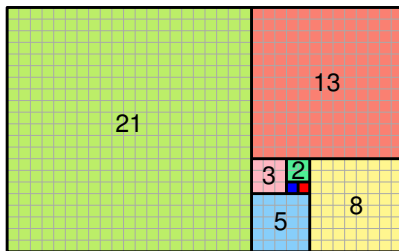
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

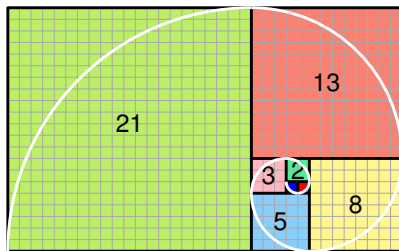
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

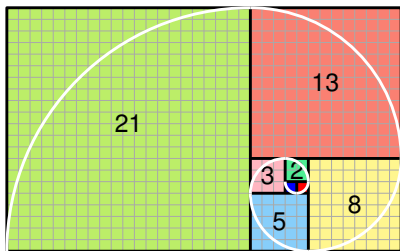
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

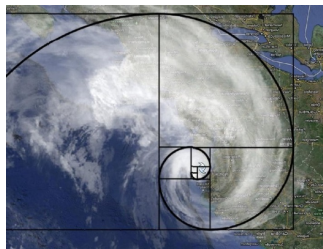
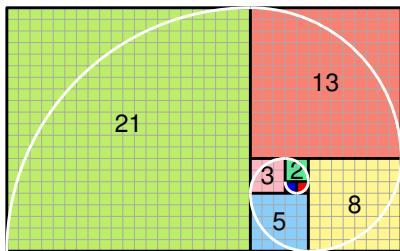
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

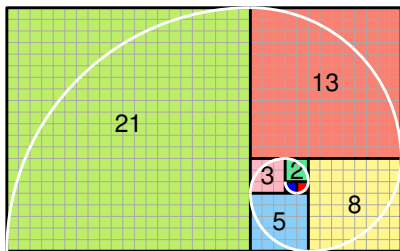
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

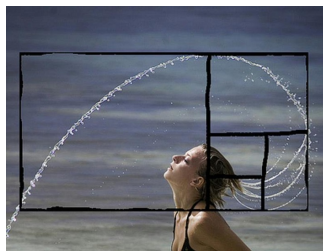
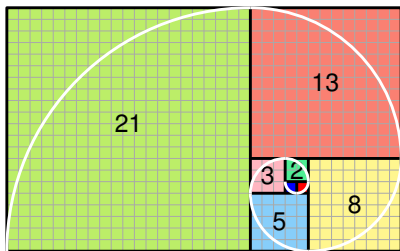
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize **Liber Abaci** (1202) od **Fibonacciho** (1170–1250).
- Množství **aplikací** v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se **zlatým řezem** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Binetův vzorec

Binetův vzorec

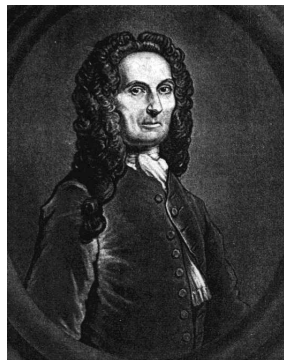
- Vytvořující funkce lze použít k odvození **Binetova vzorce**:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Binetův vzorec

- Vytvořující funkce lze použít k odvození **Binetova vzorce**:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$



Obrázek: **Jacques P. M. Binet** (1786–1856) a **Abraham de Moivre** (1667–1754).

Kuchařka: rozklad na parciální zlomky

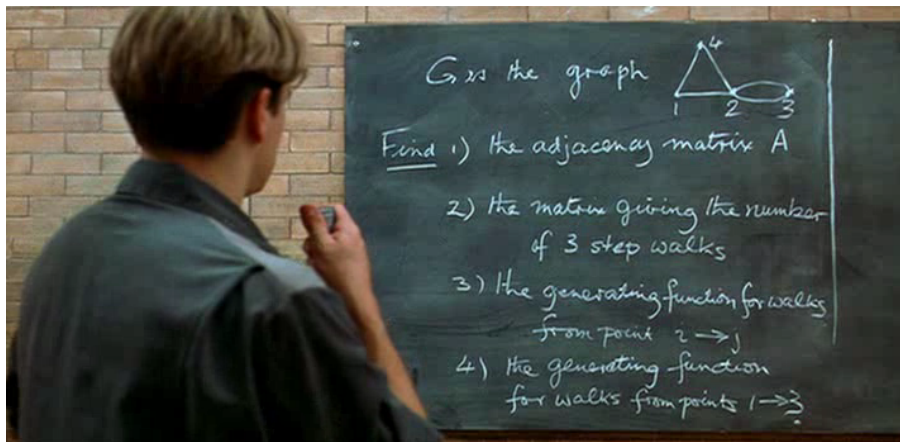
- **Vstup:** podíl $\frac{p(x)}{q(x)}$ polynomů s $st(p(x)) < st(q(x))$, kde $q(x)$ má rozklad $q(x) = (x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_N)^{n_N} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{m_1} \cdots (x^2 + \alpha_M x + \beta_M)^{m_M}$.
- **Výstup:** rozklad R racionální funkce $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parciální zlomky.
- **Metoda:** Za každý člen $(x - a_i)^{n_i}$ přidat do rozkladu R

$$\frac{A_{i,1}}{x - a_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,n_i}}{(x - a_i)^{n_i}}$$

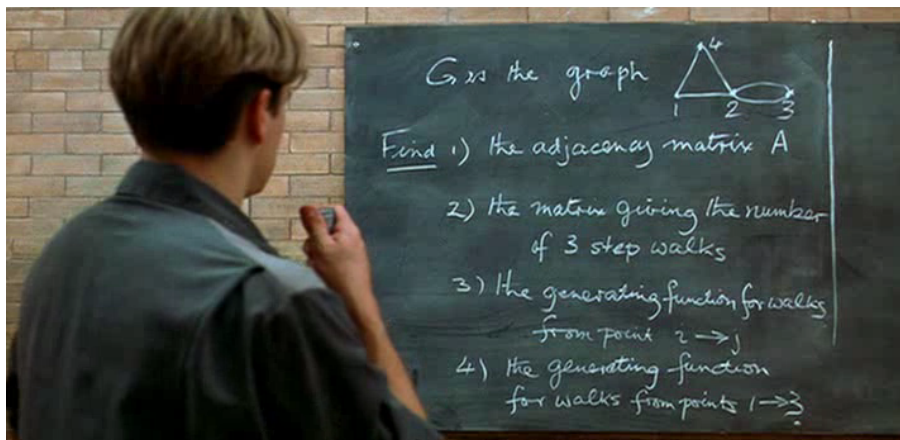
a za každý člen $(x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^{m_i}$ přidat do rozkladu R

$$\frac{B_{i,1}x + C_{i,1}}{x^2 + \alpha_i x + \beta_i} + \frac{B_{i,2}x + C_{i,2}}{(x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^2} + \cdots + \frac{B_{i,m_i}x + C_{i,m_i}}{(x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^{m_i}}$$

Rovnici $\frac{p(x)}{q(x)} = R$ vynásobit členem $q(x)$ a po pokrácení dostat za každý člen výsledného polynomu $Rq(x)$ jednu rovnici. Celkově dostaneme systém lineárních rovnic s $n_1 + \cdots + n_N + 2m_1 + \cdots + 2m_M$ proměnnými $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ a $C_{i,j}$. Ten pak stačí vyřešit.



Zdroj: Good Will Hunting.



Zdroj: Good Will Hunting.

Děkuji za pozornost.