

# Kombinatorika a grafy 1

Martin Balko

## 12. přednáška

21. prosince 2022



# Motivace: přenos dat

## Motivace: přenos dat

- Chceme přenést data komunikačním kanálem.

# Motivace: přenos dat

- Chceme přenést data komunikačním kanálem.



# Motivace: přenos dat

- Chceme přenést data komunikačním kanálem.

"Whenever I go to my balcony, I see a little creek under my house."



# Motivace: přenos dat

- Chceme přenést data komunikačním kanálem.

"Whenever I go to my balcony, I see a little creek under my house."



- Při přenosu může dojít k **chybám**.

# Motivace: přenos dat

- Chceme přenést data komunikačním kanálem.

"Whenever I go to my balcony, I see a little creek under my house."



- Při přenosu může dojít k **chybám**.

# Motivace: přenos dat

- Chceme přenést data komunikačním kanálem.

"Whenever I go to my balcony, I see a little creek under my house."



- Při přenosu může dojít k **chybám**.



# Motivace: přenos dat

- Chceme přenést data komunikačním kanálem.

"Whenever I go to my balcony, I see a little creek under my house."



"Whenever I go to my balcony, I pee a little creek under my house."



- Při přenosu může dojít k **chybám**.

# Motivace: přenos dat

- Chceme přenést data komunikačním kanálem.

"Whenever I go to my balcony, I see a little creek under my house."



"Whenever I go to my balcony, I pee a little creek under my house."



- Při přenosu může dojít k **chybám**.
- Chceme být schopni **chyby opravit** a získat odeslanou zprávu.

# Samoopravné kódy

Opakovací kód

# Opakovací kód

- Pro  $q$ -prvkovou abecedu, např.  $\Sigma = \{1, \dots, q\}$ , volíme

$$C = \{1 \cdots 1, 2 \cdots 2, \dots, q \cdots q\}.$$

Kódová slova jsou  $n$ -násobným zopakováním stejného symbolu.

# Opakovací kód

- Pro  $q$ -prvkovou abecedu, např.  $\Sigma = \{1, \dots, q\}$ , volíme

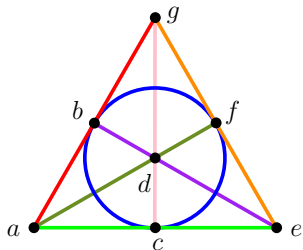
$$C = \{1 \cdots 1, 2 \cdots 2, \dots, q \cdots q\}.$$

Kódová slova jsou  $n$ -násobným zopakováním stejného symbolu.

- Vzdálenost  $d = \min_{i \neq j} \{d(i \cdots i, j \cdots j)\} = n$ .
- Dimenze  $k = \log_q(|C|) = \log_q(q) = 1$ .
- Parametry kódu:  $(n, 1, n)_q$ .

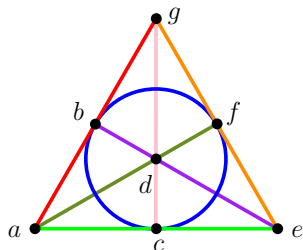
# Charakteristické vektory přímků Fanovy roviny

# Charakteristické vektory přímek Fanovy roviny





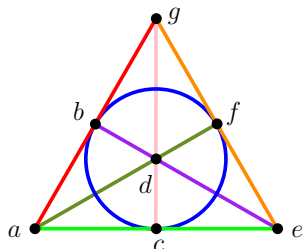
# Charakteristické vektory přímek Fanovy roviny



- Máme  $\Sigma = \{0, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n = |\{a, \dots, g\}| = 7$  a

$$C = \{1100001, 0000111, 1010100, 1001010, 0011001, 0101100, 0110010\}.$$

# Charakteristické vektory přímek Fanovy roviny

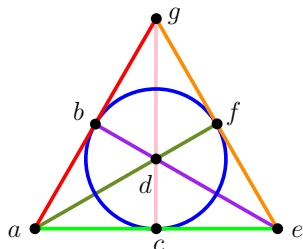


- Máme  $\Sigma = \{0, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n = |\{a, \dots, g\}| = 7$  a

$$C = \{\mathbf{1100001}, \mathbf{0000111}, \mathbf{1010100}, \mathbf{1001010}, \mathbf{0011001}, \mathbf{0101100}, \mathbf{0110010}\}.$$

- Vzdálenost  $d = 4$ , protože  $|P_i \cap P_j| = 1$ .
- Dimenze  $k = \log_2(|C|) = \log_2(7)$ .
- Parametry kódu:  $(7, \log_2(7), 4)_2$ .

# Charakteristické vektory přímků Fanovy roviny



- Máme  $\Sigma = \{0, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n = |\{a, \dots, g\}| = 7$  a  $C = \{1100001, 0000111, 1010100, 1001010, 0011001, 0101100, 0110010\}$ .
- Vzdálenost  $d = 4$ , protože  $|P_i \cap P_j| = 1$ .
- Dimenze  $k = \log_2(|C|) = \log_2(7)$ .
- Parametry kódu:  $(7, \log_2(7), 4)_2$ .
- Přidání  $1111111 \Rightarrow (7, 3, 4)_2$  a ještě přidání doplňků  $\Rightarrow (7, 4, 3)_2$ .

# Hadamardův kód

# Hadamardův kód

- Máme abecedu  $\Sigma = \{-1, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n$  a

$$C = \{\text{řádky } H \in \{-1, 1\}^{n \times n} : H \cdot H^T = n \cdot I_n\} \cup \{\text{řádky } -H\}.$$

# Hadamardův kód

- Máme abecedu  $\Sigma = \{-1, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n$  a

$$C = \{\text{řádky } H \in \{-1, 1\}^{n \times n} : H \cdot H^T = n \cdot I_n\} \cup \{\text{řádky } -H\}.$$

- Vzdálenost  $d = n/2$ , protože každé dva řádky se liší na  $n/2$  pozicích.
- Dimenze  $k = \log_2(|C|) = 1 + \log_2(n)$ .
- Parametry kódu:  $(n, 1 + \log_2(n), n/2)_2$ .

# Hadamardův kód

- Máme abecedu  $\Sigma = \{-1, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n$  a

$$C = \{\text{řádky } H \in \{-1, 1\}^{n \times n} : H \cdot H^T = n \cdot I_n\} \cup \{\text{řádky } -H\}.$$

- Vzdálenost  $d = n/2$ , protože každé dva řádky se liší na  $n/2$  pozicích.
- Dimenze  $k = \log_2(|C|) = 1 + \log_2(n)$ .
- Parametry kódu:  $(n, 1 + \log_2(n), n/2)_2$ .
- Kódování v případě  $(n = 8, 4, 4)_2$ :

# Hadamardův kód

- Máme abecedu  $\Sigma = \{-1, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n$  a

$$C = \{\text{řádky } H \in \{-1, 1\}^{n \times n} : H \cdot H^T = n \cdot I_n\} \cup \{\text{řádky } -H\}.$$

- Vzdálenost  $d = n/2$ , protože každé dva řádky se liší na  $n/2$  pozicích.
- Dimenze  $k = \log_2(|C|) = 1 + \log_2(n)$ .
- Parametry kódu:  $(n, 1 + \log_2(n), n/2)_2$ .
- Kódování v případě  $(n = 8, 4, 4)_2$ :

<i>A</i>	11111111	<i>E</i>	11110000	<i>I</i>	00000000	<i>M</i>	00001111
<i>B</i>	10101010	<i>F</i>	10100101	<i>J</i>	01010101	<i>N</i>	01011010
<i>C</i>	11001100	<i>G</i>	11000011	<i>K</i>	00110011	<i>O</i>	00111100
<i>D</i>	10011001	<i>H</i>	10010110	<i>L</i>	01100110	<i>P</i>	01101001



# Hadamardův kód

- Máme abecedu  $\Sigma = \{-1, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n$  a

$$C = \{\text{řádky } H \in \{-1, 1\}^{n \times n} : H \cdot H^T = n \cdot I_n\} \cup \{\text{řádky } -H\}.$$

- Vzdálenost  $d = n/2$ , protože každé dva řádky se liší na  $n/2$  pozicích.
- Dimenze  $k = \log_2(|C|) = 1 + \log_2(n)$ .
- Parametry kódu:  $(n, 1 + \log_2(n), n/2)_2$ .
- Kódování v případě  $(n = 8, 4, 4)_2$ :

<i>A</i>	11111111	<i>E</i>	11110000	<i>I</i>	00000000	<i>M</i>	00001111
<i>B</i>	10101010	<i>F</i>	10100101	<i>J</i>	01010101	<i>N</i>	01011010
<i>C</i>	11001100	<i>G</i>	11000011	<i>K</i>	00110011	<i>O</i>	00111100
<i>D</i>	10011001	<i>H</i>	10010110	<i>L</i>	01100110	<i>P</i>	01101001
Původní text:	<i>A</i>	<i>H</i>	<i>O</i>	<i>J</i>			

# Hadamardův kód

- Máme abecedu  $\Sigma = \{-1, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n$  a

$$C = \{\text{řádky } H \in \{-1, 1\}^{n \times n} : H \cdot H^T = n \cdot I_n\} \cup \{\text{řádky } -H\}.$$

- Vzdálenost  $d = n/2$ , protože každé dva řádky se liší na  $n/2$  pozicích.
- Dimenze  $k = \log_2(|C|) = 1 + \log_2(n)$ .
- Parametry kódu:  $(n, 1 + \log_2(n), n/2)_2$ .
- Kódování a dekódování v případě  $(n = 8, 4, 4)_2$ :

<i>A</i>	11111111	<i>E</i>	11110000	<i>I</i>	00000000	<i>M</i>	00001111
<i>B</i>	10101010	<i>F</i>	10100101	<i>J</i>	01010101	<i>N</i>	01011010
<i>C</i>	11001100	<i>G</i>	11000011	<i>K</i>	00110011	<i>O</i>	00111100
<i>D</i>	10011001	<i>H</i>	10010110	<i>L</i>	01100110	<i>P</i>	01101001

Původní text:        *A*                    *H*                    *O*                    *J*

Odeslaný text: 11111111 10010110 00111100 01010101

# Hadamardův kód

- Máme abecedu  $\Sigma = \{-1, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n$  a

$$C = \{\text{řádky } H \in \{-1, 1\}^{n \times n} : H \cdot H^T = n \cdot I_n\} \cup \{\text{řádky } -H\}.$$

- Vzdálenost  $d = n/2$ , protože každé dva řádky se liší na  $n/2$  pozicích.
- Dimenze  $k = \log_2(|C|) = 1 + \log_2(n)$ .
- Parametry kódu:  $(n, 1 + \log_2(n), n/2)_2$ .
- Kódování v případě  $(n = 8, 4, 4)_2$ :

<i>A</i>	11111111	<i>E</i>	11110000	<i>I</i>	00000000	<i>M</i>	00001111
<i>B</i>	10101010	<i>F</i>	10100101	<i>J</i>	01010101	<i>N</i>	01011010
<i>C</i>	11001100	<i>G</i>	11000011	<i>K</i>	00110011	<i>O</i>	00111100
<i>D</i>	10011001	<i>H</i>	10010110	<i>L</i>	01100110	<i>P</i>	01101001

Původní text:	<i>A</i>	<i>H</i>	<i>O</i>	<i>J</i>
Odeslaný text:	11111111	10010110	00111100	01010101
Přijatý text:	10111111	11010010	00011100	01111001

# Hadamardův kód

- Máme abecedu  $\Sigma = \{-1, 1\}$  a tedy  $q = 2$ . Délka slov je  $n$  a

$$C = \{\text{řádky } H \in \{-1, 1\}^{n \times n} : H \cdot H^T = n \cdot I_n\} \cup \{\text{řádky } -H\}.$$

- Vzdálenost  $d = n/2$ , protože každé dva řádky se liší na  $n/2$  pozicích.
- Dimenze  $k = \log_2(|C|) = 1 + \log_2(n)$ .
- Parametry kódu:  $(n, 1 + \log_2(n), n/2)_2$ .
- Kódování v případě  $(n = 8, 4, 4)_2$ :

<i>A</i>	11111111	<i>E</i>	11110000	<i>I</i>	00000000	<i>M</i>	00001111
<i>B</i>	10101010	<i>F</i>	10100101	<i>J</i>	01010101	<i>N</i>	01011010
<i>C</i>	11001100	<i>G</i>	11000011	<i>K</i>	00110011	<i>O</i>	00111100
<i>D</i>	10011001	<i>H</i>	10010110	<i>L</i>	01100110	<i>P</i>	01101001

Původní text:        *A*                    *H*                    *O*                    *J*  
Odeslaný text: 11111111 10010110 00111100 01010101  
Přijatý text: 10111111 11010010 00011100 01111001  
Dekódovaný text: *A*            *E, G, H, N*        *O*                    *P*

# Slova z $\{0, 1, 2\}^4$

2200	2201	2202	2210	2211	2212	2220	2221	2222
2100	2101	2102	2110	2111	2112	2120	2121	2122
2000	2001	2002	2010	2011	2012	2020	2021	2022
1200	1201	1202	1210	1211	1212	1220	1221	1222
1100	1101	1102	1110	1111	1112	1120	1121	1122
1000	1001	1002	1010	1011	1012	1020	1021	1022
0200	0201	0202	0210	0211	0212	0220	0221	0222
0100	0101	0102	0110	0111	0112	0120	0121	0122
0000	0001	0002	0010	0011	0012	0020	0021	0022

# Kombinatorická koule $B(0000, 1)$

2200	2201	2202	2210	2211	2212	2220	2221	2222
2100	2101	2102	2110	2111	2112	2120	2121	2122
2000	2001	2002	2010	2011	2012	2020	2021	2022
1200	1201	1202	1210	1211	1212	1220	1221	1222
1100	1101	1102	1110	1111	1112	1120	1121	1122
1000	1001	1002	1010	1011	1012	1020	1021	1022
0200	0201	0202	0210	0211	0212	0220	0221	0222
0100	0101	0102	0110	0111	0112	0120	0121	0122
0000	0001	0002	0010	0011	0012	0020	0021	0022

## Kombinatorická koule $B(0000, 2)$

2200	2201	2202	2210	2211	2212	2220	2221	2222
2100	2101	2102	2110	2111	2112	2120	2121	2122
2000	2001	2002	2010	2011	2012	2020	2021	2022
1200	1201	1202	1210	1211	1212	1220	1221	1222
1100	1101	1102	1110	1111	1112	1120	1121	1122
1000	1001	1002	1010	1011	1012	1020	1021	1022
0200	0201	0202	0210	0211	0212	0220	0221	0222
0100	0101	0102	0110	0111	0112	0120	0121	0122
0000	0001	0002	0010	0011	0012	0020	0021	0022

# Kombinatorická koule $B(0000, 3)$

2200	2201	2202	2210	2211	2212	2220	2221	2222
2100	2101	2102	2110	2111	2112	2120	2121	2122
2000	2001	2002	2010	2011	2012	2020	2021	2022
1200	1201	1202	1210	1211	1212	1220	1221	1222
1100	1101	1102	1110	1111	1112	1120	1121	1122
1000	1001	1002	1010	1011	1012	1020	1021	1022
0200	0201	0202	0210	0211	0212	0220	0221	0222
0100	0101	0102	0110	0111	0112	0120	0121	0122
0000	0001	0002	0010	0011	0012	0020	0021	0022



## Opakovací kód s parametry $(4, 1, 4)_3$

2200	2201	2202	2210	2211	2212	2220	2221	2222
2100	2101	2102	2110	2111	2112	2120	2121	2122
2000	2001	2002	2010	2011	2012	2020	2021	2022
1200	1201	1202	1210	1211	1212	1220	1221	1222
1100	1101	1102	1110	1111	1112	1120	1121	1122
1000	1001	1002	1010	1011	1012	1020	1021	1022
0200	0201	0202	0210	0211	0212	0220	0221	0222
0100	0101	0102	0110	0111	0112	0120	0121	0122
0000	0001	0002	0010	0011	0012	0020	0021	0022

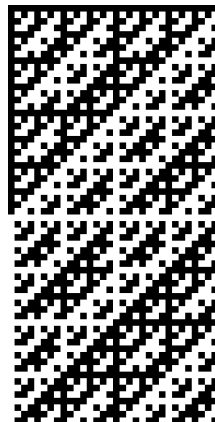
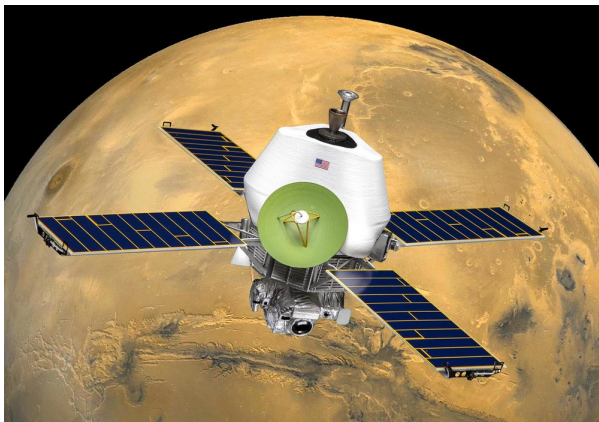
# Aplikace: sonda Mariner 9

## Aplikace: sonda Mariner 9

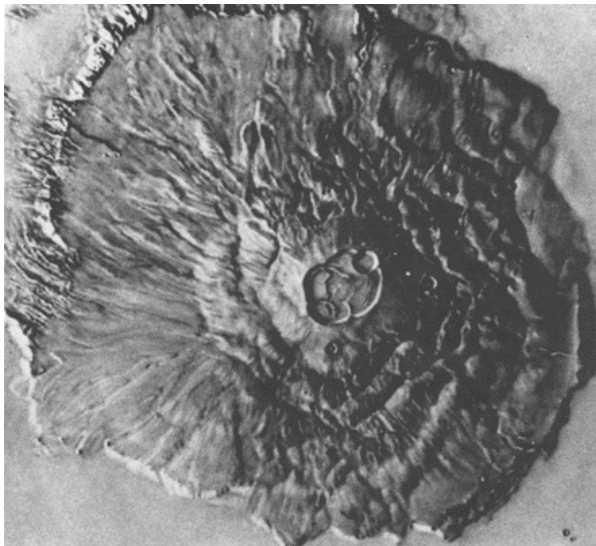
- Hadamardův kód s parametry  $(32, 6, 16)_2$  byl použit sondou Mariner 9 pro přenos prvních fotografií Marsu.

## Aplikace: sonda Mariner 9

- Hadamardův kód s parametry  $(32, 6, 16)_2$  byl použit sondou Mariner 9 pro přenos prvních fotografií Marsu.

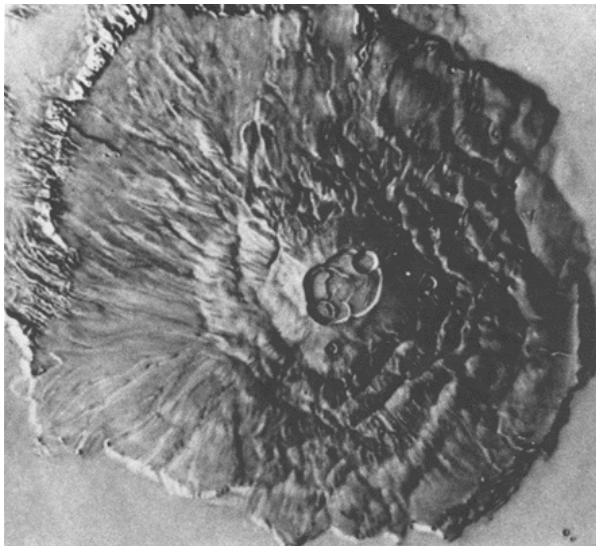


Obrázek: Sonda Mariner 9 a Hadamardova matice  $32 \times 32$  použita při kódování.



Obrázek: Fotografie hory Olympus Mons pořízená sondou Mariner 9.

Zdroj: <https://www.khanacademy.org>



Obrázek: Fotografie hory Olympus Mons pořízená sondou Mariner 9.

Zdroj: <https://www.khanacademy.org>

Děkuji za pozornost a přeji Veselé Vánoce.