Kombinatorika a grafy 1 — 9. cvičení*

8. prosince 2022

1 Počty koster

Kostra v grafu $G = (V, E)$ je stromem $T = (V, E')$ s $E' \subseteq E$. Neboli T je souvislým podgrafem grafu G na stejné množině vrcholů a T navíc neobsahuje cyklus. Graf má kostru právě tehdy, když je souvislý. Pro graf G označme jako $\kappa(G)$ počet koster grafu G.

Cayleyho vzorec. *Pro každé celé číslo $n \geq 2$ je počet koster úplného grafu K_n na n vrcholech roven n^{n-2}. Neboli $\kappa(K_n) = n^{n-2}$*

Laplacián grafu $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ je $n \times n$ matice $L(G) = (L_{i,j})_{i,j=1}^n$, kde

$$L_{i,j} = \begin{cases} \deg_G(i), & \text{pokud } i = j, \\ -1, & \text{pokud } \{i, j\} \in E, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Kirchhoffova věta. *Pro každý graf $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ platí $\kappa(G) = \det(L(G)^{1,1})$, kde $L(G)^{1,1}$ značí matici $L(G)$ bez prvního řádku a bez prvního sloupce.*

Z přednášky také víme, že počet koster úplného grafu K_n bez jedné hrany je roven $(n-2)n^{n-3}$ a počet koster úplného grafu K_n obsahujících pevně zvolenou hranu je $2n^{n-3}$.

Příklad 1. *Spočtěte počet koster v následujících grafech:*

(a) $K_n \div e$, tedy grafu K_n s jednou podrozdělenou hranou e,

(b) $K_n \div E$, tedy grafu K_n se všemi hranami podrozdělenými,

(c) $C_m \oplus_e C_n$, tedy dvou cyklů slepených společnou hranou e,

Příklad 2. *Spočtěte počet koster úplného grafu K_n za použití věty o determinantu Laplaciánu.*

Příklad 3. *Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{n,m}$ za použití věty o determinantu Laplaciánu.*

2 Počítání dvěma způsoby

Počítání dvěma způsoby je metoda důkazu v kombinatorice, kde odhadujeme neznámou x pomocí odhadů jiné neznámé z, které umíme určit dvěma způsoby: jeden za použití x a druhý přímým výpočtem. Zkombinováním obou odhadů pro z poté dostáváme odhad pro hledané x.

Příklad 4. *Na dětském táboře je 15 dětí, každý den mají tři děti službu v kuchyni, a platí, že každá dvojice dětí má právě jednou společnou službu. Kolik dní trvá tábor?*

Příklad 5. *Při zápočtové písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.*

Příklad 6. *Pole mřížky 21×21 jsou obarvena tak, že v každém řádku i sloupci se vyskytuje nejvýše 5 různých barev. Ukažte, že se některá z barev vyskytuje ve třech řádcích a zároveň i ve třech sloupcích.*

Příklad 7. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu G, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami (nemusí se nutně jednat o korektní obarvení, tj. může existovat hrana s oběma koncovými vrcholy stejné barvy). Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/