Kombinatorika a grafy 1 — 8. cvičení*

1. prosince 2022

1 Grafová souvislost

Hranový řez v grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* v grafu G je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Hranová souvislost* $k_e(G)$ grafu G je velikost nejmenšího hranového řezu v G a 1, pokud $G \cong K_1$. *Vrcholovou souvislost* $k_v(G)$ grafu G definujeme jako $n-1$, je-li G úplný graf K_n s $n \geq 2$, jako 1 pro $G \cong K_1$ a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu v G jinak. Graf G je *hranově t-souvislý* pro $t \in \mathbb{N}_0$, pokud platí $k_e(G) \geq t$ a *vrcholově t-souvislý*, pokud platí $k_v(G) \geq t$.

Z přednášky víme, že odebráním hrany vrcholová ani hranová souvislost nevzroste a klesne nanejvýš o jedna.

Ušaté lemma. *Graf je vrcholově 2-souvislý právě tehdy, když jde dostat z cyklu lepením uší.*

Příklad 1. *Najděte příklad grafu G, ve kterém lze odebrat vrchol tak, že*

(a) hranová souvislost G klesne (vzroste) o libovolně velké předem dané číslo.

(b) vrcholová souvislost G vzroste o libovolně velké předem dané číslo. O kolik může vrcholová souvislost klesnout po odebrání vrcholu?

Příklad 2. *Rozhodněte, zda je každý souvislý graf se sudými stupni a s neprázdnou množinou hran*

(a) vrcholově 2-souvislý,

(b) hranově 2-souvislý.

Příklad 3. *Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako $\mathbb{B}^k$ množinu binárních řetízků délky k. Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k-*krychle*, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetízky u a v liší na právě jedné pozici. Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.*

Příklad 4. *Buď G kriticky 2-souvislý graf, to znamená, že je vrcholově 2-souvislý, ale žádný z grafů $G - e$ pro libovolné $e \in E(G)$ není vrcholově 2-souvislý.*

(a) Dokažte, že alespoň jeden vrchol G má stupeň 2.

(b) Pro každé $n \geq 2$ uveďte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň n.

Příklad 5. *Dokážete vymyslet variantu Ušatého lemma pro hranovou 2-souvislost?*

Příklad 6. *Orientovaný graf je* silně souvislý*, pokud se z každého vrcholu jde dostat do každého po orientované cestě. Dokažte, že graf je hranově 2-souvislý právě tehdy, když jej lze zorientovat tak, že výsledný orientovaný graf je silně souvislý.*

Hint: může se hodit Příklad 5.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/