Kombinatorika a grafy 1 — 6. cvičení*

10. listopadu 2022

1 Toky v sítích

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z).$$

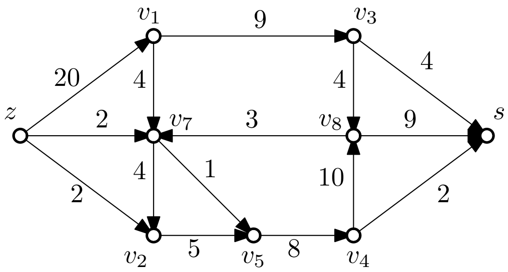
Řezem nazveme podmnožinu E, po jejímž odstranění neexistuje orientovaná cesta ze zdroje do stoku. *Kapacita řezu* R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.

Jako *rezervu hrany* e na nějaké cestě P ze z do s označíme $r(e) = c(e) - f(e)$ pro hranu e orientovanou po směru P a $r(e) = f(e)$ pro hranu orientovanou proti směru P. Cesta P je pak *zlepšující*, pokud všechny její hrany mají kladnou rezervu.

Algoritmus 1.1: Ford–Fulkerson(G)

$f \leftarrow$ *nulový tok*
while existuje zlepšující cesta P ze z do s
do $\begin{cases} \epsilon_P \leftarrow \min_{e\in E(P)} r(e) \\ \text{Zvětšíme tok } f \text{ podél } P \text{ o } \epsilon_P \text{ (každé hraně } e \text{ po směru zvětšíme} \\ f(e) \text{ a hranám proti směru zmenšíme } f(e)\text{).} \end{cases}$
Vrať tok f.

Příklad 1. *Najděte Fordovým–Fulkersonovým algoritmem tok maximální velikosti v následující síti. Nalezněte také řez minimální kapacity a ověřte tak, že daný tok má skutečně maximální velikost.*



Příklad 2. *(a) Najděte síť (a posloupnost použitých zlepšujících cest), na které F.-F. algoritmus nedospěje ke správnému výsledku, pokud mu povolíme používat jen orientované zlepšující cesty.*

(b) Najděte posloupnost sítí (a posloupnosti použitých zlepšujících cest), na které má F.-F. algoritmus exponenciální časovou složitost (vzhledem k počtu bitů potřebných k uložení grafu a kapacit).

Příklad 3. *Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům („vrcholem v nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času“). Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?*

Příklad 4. *Ukažte, že problém hledání maximálního toku v síti, která má více zdrojů a více stoků, lze redukovat na případ s jedním zdrojem a jedním stokem.*

Příklad 5. *Dokažte, že počet toků maximální velikosti je v každé síti buď jedna nebo je nekonečný.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/