

# Kombinatorika a grafy 1 — 2. cvičení\*

13. října 2022

## 1 Vytvořující funkce – úvod

**Příklad 1.** (a) Mějme polynomy  $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$  a  $q(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$ . Jaký je koeficient u členu  $x^7$  v jejich součinu  $p(x)q(x)$ ?

(b) Vracíme se z nákupu s pěti jednokilovými položkami a třemi dvoukilovými. Máme s sebou tašku, která unese maximálně sedm kilogramů. Kolika způsoby můžeme maximálně naplnit tašku?

**Příklad 2.** V cukrárně prodávají 3 druhy zákusků—větrníky, kremrole a dortíky. Zaujímá nás, kolika způsoby jde nakoupit 12 zákusků tak, abychom od každého druhu koupili aspoň dva kousky a zároveň koupili nanejvýš tři kremrole. Sestrojte příslušnou mocninnou řadu.

**Binomická věta.** Pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

## 2 Vytvořující funkce – počítání s mocninnými řadami

Mocninná řada je řada tvaru  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ , kde  $a_i \in \mathbb{R}$  a  $x$  je reálná proměnná. Jako (obyčejnou) vytvořující funkci posloupnosti  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  označíme mocninnou řadu  $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ . Například funkce  $\frac{1}{1-x}$  je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti  $(1, 1, 1, \dots)$  a podle binomické věty je  $(1+x)^n$  vytvořující funkcí posloupnosti  $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots)$ . Přejít mezi posloupnostmi a funkcemi je pro tuto techniku klíčový.

**Tvrzení.** Bud'  $(a_0, a_1, \dots)$  posloupnost reálných čísel. Nechť existuje  $K$  takové, že  $|a_i| \leq K^i$  pro všechna  $i$ . Potom pro každé  $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$  řada  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci  $a(x)$  proměnné  $x$  na uvedeném intervalu. Hodnotami  $a(x)$  na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy  $a_0, a_1, \dots$  jednoznačně určeny,  $a(x)$  má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_i = \frac{a^{(i)}(0)}{i!}.$$

**Příklad 3.** Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

(a)  $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \dots)$ ,

(b)  $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$ ,

(c)  $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$ ,

(d)  $(0, 2, 6, 12, 20, \dots)$ , tedy  $n$ -tý člen je součtem prvních  $n$  sudých přirozených čísel včetně nuly.

**Příklad 4.** Určete koeficient

(a) u  $x^{10}$  v  $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$ ,

(b) u  $x^{2022}$  v  $\sin(x)$ .

**Příklad 5.** Zjistěte, čemu se rovná  $a_n$ , které je zadáno rekurentní rovnicí  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 9$  a  $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$  pro  $n \geq 0$ .

**Příklad 6.** Zjistěte, čemu se rovná  $a_n$ , které je zadáno rekurentní rovnicí  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$  a  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$  pro  $n \geq 0$ .

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^i a_i, \dots)$
$x^n a(x)$	$(0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$ ( $n$ nul na začátku)
$a(x^n)$	$(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots)$ (střídavě $n - 1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \dots - a_{n-1} x^{n-1}}{x^n}$	$(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, i a_i, \dots)$
$\int_0^x a(t) dt$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_i}{i+1}, \dots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \dots)$ , kde $c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$