Kombinatorika a grafy 1 — 10. cvičení*

14. prosince 2022

1 Ramseyova teorie

Pro $k \in \mathbb{N}$ nazveme *k-obarvením* množiny X libovolnou funkci $f\colon X \to C$, kde C je množina k *barev*. Pro $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ definujme *Ramseyovo číslo* $R_2(n_1, \dots, n_k)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé k-obarvení hran grafu K_N existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že dané k-obarvení obsahuje K_{n_i} jako podgraf se všemi hranami obarvenými i-tou barvou.

Ramseyova věta pro grafy. *Pro každé $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ je číslo $R_2(n_1, \dots, n_k)$ konečné.*

Z přednášky také víme, že $R_2(3,3) = 6$ a $R_2(k,l) \le \binom{k+l-2}{k-1}$ pro každé $k, l \in \mathbb{N}$.

Označíme-li pro grafy $H_1, \dots, H_k$ jako $R_2(H_1, \dots, H_k)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé k-obarvení hran grafu K_N existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že dané k-obarvení obsahuje H_i jako podgraf se všemi hranami obarvenými i-tou barvou, pak z Ramseyovy věty dostáváme $R_2(H_1, \dots, H_k) \le R_2(|V(H_1)|, \dots, |V(H_k)|)$. Tedy i tato Ramseyovská čísla obecných grafů jsou vždy konečná.

Příklad 1. *Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:*

(a) Obarvíme-li dostatečně velký úplný graf se smyčkami dvěma barvami (barvíme hrany a smyčky), vždy existuje jednobarevný úplný podgraf se smyčkami na n vrcholech.

(b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo doplněk G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje doplněk $K_{n,n}$ jako podgraf.

(d) Pro každý graf G existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že v libovolném 2-obarvení hran K_N najdeme jednobarevnou G jako indukovaný podgraf.

Příklad 2. *Ukažte, že $R_2(C_4, C_4) = 6$, tedy že v každém červeno-modrém obarvení hran K_6 najdeme jednobarevný 4-cyklus, zatímco na K_5 se to už podařit nemusí.*

Případně dokažte nejlepší odhady na $R(C_4, C_4)$, jaké zvládnete.

Příklad 3. *Ukažte, že pro každé fixní $k \in \mathbb{N}$ existuje $N_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $N \ge N_0$ je v každém 2-obarvení hran grafu K_N aspoň $\Omega(N^k)$ kopií K_k se všemi hranami stejné barvy. Neboli ukažte, že od jistého počtu vrcholů není zaručena jen jedna jednobarevná kopie K_k, ale dokonce jich najdeme velmi mnoho.*

Příklad 4. *(*) Dokažte nerovnost $R_2(3, \dots, 3) \le \lfloor e \cdot k! \rfloor + 1$ pro Ramseyovo číslo $R_2(3, \dots, 3)$ s k barvami.*

Příklad 5. *Dokažte Erdősovu–Szekeresovu větu pro dimenzi 3. Neboli ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje přirozené $N = N(k)$ takové, že každá množina N bodů z $\mathbb{R}^3$ v obecné poloze (žádné 4 body neleží na společné rovině) obsahuje k bodů, které jsou vrcholy konvexního mnohostěnu.*

Můžete využít Erdősovu–Szekeresovu větu v dimenzi 2.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/