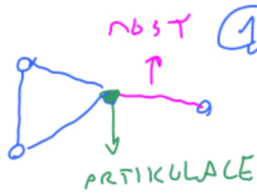
2-souvislost podrobněji:

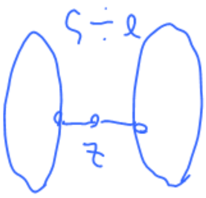


- hranový řez velikosti jedna se nazývá **most**
- vrcholový řez velikosti jedna se nazývá **artikulace**
- pro graf $G=(V,E)$ a $e \in E$ označme jako $G \div e$ graf vzniklý z G operací **podrozdělení hrany** e na cestu délky 2 ($x \overset{e}{—} y \longrightarrow x — \bullet — y$)

- **Lemma 9.1**: pro každý graf $G=(V,E)$ a pro každou hranu $e \in E$ platí:
  G je vrcholově 2-souvislý $\Leftrightarrow$ $G \div e$ je vrcholově 2-souvislý

Dk:

- i) $\Leftarrow$ pro $v \in V$ je $G - v$ souvislý $\Leftrightarrow$ $(G \div e) - v$ je souvislý
  - v je vrcholem i v $G \div e$
- ii) $\Rightarrow$ stačí uvážit odebrání nově přidaného vrcholu z při podrozdělení hrany e
  - G je vrcholově 2-souvislý $\Rightarrow |V| \geq 3$
  - je-li z artikulací, pak je artikulací i aspoň jeden z konců hrany e (protože $|V| \geq 3$) ⊠



- **Věta 9.2 (ušaté lemma)**: Graf G je vrcholově 2-souvislý $\Leftrightarrow$ G lze vytvořit z K_3 operacemi přidávání a podrozdělování hran

Proč „ušaté lemma"? přidání hrany a její následné rozdělení odpovídá přidání cesty mezi 2 vrcholy (= „přilepení ucha")

- máme **alternativní znění** věty 9.2:
  G je vrcholově 2-souvislý $\Leftrightarrow$ G lze vytvořit z cyklu přidáváním uší

Dk:

- protože přidání ucha lze simulovat přidáním hrany a jejím podrozdělováním, pak stačí pro $\Leftarrow$ ukázat tvrzení o uších
- i) $\Leftarrow$ K_3 je vrcholově 2-souvislý a podle **Lemma 9.1** podrozdělení hrany vrcholovou 2-souvislost nesnižuje
  - přidání hrany vrcholovou 2-souvislost také nesnižuje
    ↳ víme z minulé přednášky

ii) ⇒ chceme ukázat, že daný vrcholově 2-souvislý graf G lze získat z cyklu lepením uší

- buď G_0 libovolný cyklus v $G=(V,E)$
  - nějaký cyklus v G existuje, jinak je G les a není vrcholově 2-souvislý
- mějme již definované grafy $G_0,\dots,G_i$, kde $G_{j+1}=(V_{j+1},E_{j+1})$ vznikne z G_j přilepením ucha P_j
- pokud $G_i=G$, tak jsme hotovi
- jinak $E_i\neq E$
- protože G je souvislý, tak $\exists\, e\in E\setminus E_i$ takové, že $e\cap V_i\neq\emptyset$
- pokud $e\subseteq V_i$, tak definujeme $G_{i+1}=G_i+e$
- jinak $e=\{v,v'\}$, kde $v\in V_i$ a $v'\notin V_i$
- G je vrcholově 2-souvislý ⇒ $G-v$ je souvislý ⇒ $\exists$ cesta P v $G-v$ spojující v' a $v''\in V_i$ (bůno $P-v''$ leží celá mimo V_i)

⇒ definujme G_{i+1} jako graf vzniklý z G přidáním ucha tvořeného cestou P a hranou e

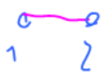
☒

POČÍTÁNÍ DVĚMA ZPŮSOBY:

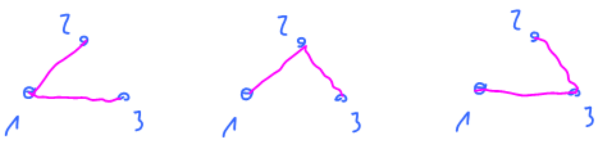
- METODA DŮKAZŮ V KOMBINATORICE
- URČÍME NĚJAKÝ NEZNÁMÝ POČET X VYJÁDŘENÍM NĚJAKÉHO POČTU Z DVĚMA VÝRAZY, Z NICHŽ JEDEN X OBSAHUJE A DRUHÝ NE ⇒ MÁME VYJÁDŘENÍ PRO X
  - VAN LINT A WILSON TUTO TECHNIKU OZNAČUJÍ ZA JEDEN Z NEJDŮLEŽITĚJŠÍCH NÁSTROJŮ V KOMBINATORICE
- S TOUTO TECHNIKOU JSME SE JIŽ SETKALI NAPŘÍKLAD U:
  - PRINCIPU SUDOSTI
  - BINOMICKÉ VĚTY
  - DŮKAZU, ŽE $\exists$ $n-1$ MOLS $\Leftrightarrow$ $\exists$ KPR ŘÁDU n
- UKÁŽEME SI DALŠÍ (A POKROČILEJŠÍ) PŘÍKLADY POUŽITÍ

1) CAYLEYHO VZOREC:

- KOLIKA ZPŮSOBY LZE VYTVOŘIT STROM NA VRCHOLECH $\{1,\dots,n\}$?
- NEBOLI JAKÝ JE POČET KOSTER $\kappa(n)$ GRAFU K_n?
  - KOSTRA GRAFU $G=(V,E)$ JE STROM $T=(V,E')$ S $E'\subseteq E$
- PŘÍKLAD:



$\kappa(2)=1$



$\kappa(3)=3$

4× 12×

$\Rightarrow \kappa(4)=16$

- ČÍSLO $\kappa(n)$ SE ZAČALO STUDOVAT V SOUVISLOSTI S ELEKTRICKÝMI OBVODY
  - HRANY GRAFU G = VODIČE S JEDNOTKOVÝM ODPOREM
  - $\{x,y\}$ = HRANA G, PAK

$$\text{ODPOR MEZI } x \text{ A } y = \frac{\text{POČET KOSTER } G \text{ OBSAHUJÍCÍCH HRANU } \{x,y\}}{\text{POČET KOSTER } G}$$

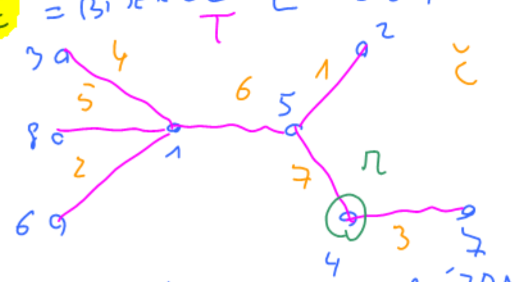
- **VĚTA 9.3 (CAYLEYHO VZOREC):** PRO KAŽDÉ $n\geq 1$ PLATÍ $\kappa(n)=n^{n-2}$
  - ŘADA DŮKAZŮ S VELMI ODLIŠNÝMI MYŠLENKAMI
  - UKÁŽEME SI NEJJEDNODUŠŠÍ DŮKAZ ZALOŽENÝ NA POČÍTÁNÍ DVĚMA ZPŮSOBY (OBJEVENÝ JIMEM PITMANEM (1999))

– DK CAYLEYHO FORMULE:

– BUDEME DVĚMA ZPŮSOBY POČÍTAT POVYKOSY = „POSTUP VÝROBY KOŘENOVÉHO STROMU", FORMÁLNĚ: USPOŘÁDANÁ TROJICE $(T, r, \check{c})$, KDE

- T = STROM $(\{1, \dots, m\}, E)$
- r = KOŘEN T
- $\check{c}$ = BIJEKCE $E \to \{1, \dots, m-1\}$ (ČÍSLOVÁNÍ HRAN)

– PŘÍKLAD:



– VYTVÁŘÍME KOŘENOVÝ STROM Z PRÁZDNÉHO GRAFU POSTUPNÝM PŘIDÁVÁNÍM HRAN V POŘADÍ URČENÉM FUNKCÍ $\check{c}$

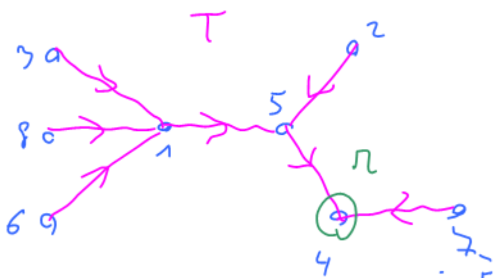
1) 1. ZPŮSOB POČÍTÁNÍ POVYKOSŮ:

– V KAŽDÉM STROMĚ T S m VRCHOLY LZE KOŘEN ZVOLIT m ZPŮSOBY A POČET MOŽNÝCH POŘADÍ HRAN JE $(m-1)!$ ⇒ POČET POVYKOSŮ Z JE $m(m-1)!\,K(m)$

2) 2. ZPŮSOB POČÍTÁNÍ POVYKOSŮ:

– KOŘENOVÝ STROM (T, r) UVÁŽÍME JAKO ORIENTOVANÝ STROM, KDE ŠIPKY SMĚŘUJÍ KE KOŘENU r

– PŘÍKLAD:



– KAŽDÁ ORIENTACE STROMU S PRÁVĚ JEDNÍM VRCHOLEM, KTERÝ NENÍ ZAČÁTKEM ŽÁDNÉ ŠIPKY, JEDNOZNAČNĚ ODPOVÍDÁ KOŘENOVÉMU STROMU

– POVYKOSY SPOČÍTÁME TAK, ŽE K PRÁZDNÉMU ORIENTOVANÉMU GRAFU BUDEME PŘIDÁVAT ŠIPKY V $m-1$ KROCÍCH

– 1. ŠIPKA LZE PŘIDAT $m(m-1)$ ZPŮSOBY (SPOJUJE 2 RŮZNÉ VRCHOLY)

– 2. ŠIPKA NESMÍ VYCHÁZET ZE STEJNÉHO VRCHOLU JAKO TA PRVNÍ

– 2. ŠIPKA NESMÍ VYTVOŘIT (NEORIENTOVANOU) KRUŽNICI

– OBECNĚ a) NESMÍ VYTVOŘIT ⇒ NOVÁ ŠIPKA SPOJUJE 2 KOMPONENTY

b) Z KAŽDÉHO VRCHOLU AŽ NA JEDEN MUSÍ VYCHÁZET ≥1 ŠIPKA

– CELKEM MÁME $m-1$ ŠIPEK ⇒ KAŽDÁ VYCHÁZÍ Z VRCHOLU, Z NĚJŽ JEŠTĚ NIC NEVYCHÁZÍ

– V KAŽDÉ KOMPONENTĚ JE PRÁVĚ 1 VRCHOL, Z NĚJŽ ŽÁDNÁ ŠIPKA NEVYCHÁZÍ („KOŘEN KOMPONENTY")

– KOMPONENTA MÁ m VRCHOLŮ A $m-1$ HRAN A PODLE b) Z KAŽDÉHO VYCHÁZÍ ≤ 1 ŠIPKA

⇒ PO PŘIDÁNÍ $k \in \mathbb{N}_0$ ŠIPEK MÁ GRAF $n-k$ KOMPONENT

⇒ $(k+1)$-NÍ ŠIPKA VEDE Z KOŘENE NĚJAKÉ KOMPONENTY DO LIBOVOLNÉHO VRCHOLU JINÉ KOMPONENTY ⇒ $(n-k-1)n$ MOŽNOSTÍ

⇒ POČET POSLOUPNOSTÍ JE $z = \prod_{k=0}^{n-2} (n-k-1)n = (n-1)!\, n^{n-1}$

⇒ Z OBOU ZPŮSOBŮ MÁME $n(n-1)!\,\kappa(n) = z = (n-1)!\, n^{n-1} \Rightarrow \underline{\underline{\kappa(n) = n^{n-2}}}$ ⊠

– **VĚTA 9.4**:

GRAF $K_n - e$ MÁ $(n-2)\cdot n^{n-3}$ KOSTER PRO $n \geq 2$

DK:

– OPĚT POČÍTÁNÍ DVĚMA ZPŮSOBY

– POČET KOSTER GRAFU $G=(V,E)$ JAKO $\kappa(G)$ A PRO $e \in E$ JAKO

– OZNAČÍME $\kappa_e(G)$ POČET KOSTER GRAFU G OBSAHUJÍCÍCH HRANU e

– PLATÍ $\kappa(G) = \kappa(G-e) + \kappa_e(G)$ PRO KAŽDÝ GRAF G (*)

– CHCEME UKÁZAT $\kappa(K_n - e) = (n-2)\cdot n^{n-3}$

– URČÍME $\kappa_e(K_n)$ SPOČÍTÁNÍM $z = |\{(e,T) : T = \text{KOSTRA } K_n,\ e \in E(T)\}|$

DVĚMA ZPŮSOBY

– 1) 1. ZPŮSOB SPOČÍTÁNÍ z:

– $z = \underbrace{\kappa(K_n)}_{\text{VOLBA } T} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\text{VOLBA } e \in E(T) \text{ PRO DANÉ } T} \overset{\text{VĚTA 9.3}}{=} n^{n-2}\cdot(n-1)$

– 2) 2. ZPŮSOB SPOČÍTÁNÍ z:

– $z = \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{VOLBA } e} \cdot \underbrace{\kappa_e(K_n)}_{\text{VOLBA } T \text{ OBSAHUJÍCÍCH DANOU HRANU } e}$

⇒ $n^{n-2}\cdot(n-1) = z = \binom{n}{2}\cdot \kappa_e(K_n) \Rightarrow \kappa_e(K_n) = \frac{(n-1)n^{n-2}}{\binom{n}{2}} = \underline{\underline{2\cdot n^{n-3}}}$

– PODLE (*) PRO $G = K_n$ TAK MÁME $\underbrace{\kappa(K_n)}_{= n^{n-2}} = \kappa(K_n - e) + \underbrace{\kappa_e(K_n)}_{= 2\cdot n^{n-3}}$

⇒ $\kappa(K_n - e) = \underline{\underline{(n-2)n^{n-3}}}$ ⊠

- POČET KOSTER $\kappa(G)$ GRAFU $G = (\{1, \dots, n\}, E)$ LZE URČIT POMOCÍ DETERMINANTŮ
- UVAŽME LAPLACIÁN $L(G)$ GRAFU G, TEDY MATICI $L(G) = (L_{ij})_{i,j=1}^{n}$, KDE

$$L_{ij} = \begin{cases} \deg_G(i) & i = j \\ -1 & \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{JINAK} \end{cases}$$

- VĚTA 9.5 (KIRCHHOFFOVA VĚTA):

$$\forall G : \kappa(G) = \det\big(\underbrace{L(G)^{1,1}}_{\text{LAPLACIÁN } L(G) \text{ BEZ 1. ŘÁDKU A 1. SLOUPCE}}\big)$$

  - BEZ DŮKAZU

- PŘÍKLAD:
  - $L(K_n) = \underbrace{\begin{pmatrix} n-1 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & n-1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\} n$

  - POTOM $L(K_n)^{1,1} = n-1 \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} n-1 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & n-1 \end{pmatrix}}_{n-1} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & n & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix}}_{n-1} \Big\} n-1$

$$\Rightarrow \kappa(K_n) \overset{\text{VĚTA 9.5}}{=} \det\left(L(K_n)^{1,1}\right) = \underline{\underline{n^{n-2}}}$$