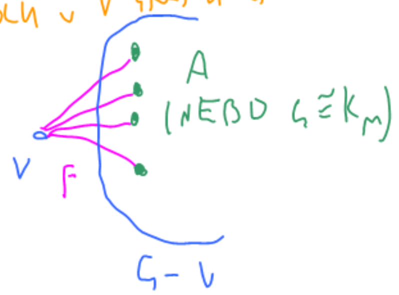
Míra souvislosti grafů:

- připomenutí:
  - graf je **souvislý**, pokud jsou každé jeho dva vrcholy spojené cestou
  - jinak je graf **nesouvislý** a je rozdělen na ≥ 2 **komponenty souvislosti**
- budeme zkoumat míru souvislosti grafů, čili jak moc je graf odolný proti rozpadnutí při odebírání hran či vrcholů
- **hranový řez** v grafu $G=(V,E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $G-F=(V, E \setminus F)$ je nesouvislý (hranový řez se někdy nazývá **separátor**)
- **vrcholový řez** v G je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $G-A = \left(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2}\right)$ je nesouvislý
- **hranová souvislost** grafu G je $k_e(G) = \begin{cases} \min\{|F| : F \text{ je hranový řez v } G\} \\ 1 & G \cong K_1 \end{cases}$ ($\cong$ = izomorfismus)
- **vrcholová souvislost** grafu G je $k_v(G) = \begin{cases} \min\{|A| : A \text{ je vrcholový řez v } G\} \\ 1 & G \cong K_1 \\ m-1 & G \cong K_m \text{ pro } m \geq 2 \end{cases}$
  - nesouvislé grafy mají vrcholovou i hranovou souvislost 0
- pro $k \in \mathbb{N}_0$ je graf G **hranově k-souvislý**, pokud $k_e(G) \geq k$
  vrcholově k-souvislý, pokud $k_v(G) \geq k$
- $\forall G=(V,E), G \not\cong K_1 : k_e(G), k_v(G) \leq \min\{\deg_G(v); v \in V\}$ ($\deg_G(v)$ = stupeň vrcholu v v grafu G)



- jak se mění souvislost při odebírání hran?
- **Lemma 8.1**:
  $$\forall G=(V,E)\ \forall e \in E : k_e(G)-1 \leq k_e(G-e) \leq k_e(G)$$
  - čili odebrání hrany sníží hranovou souvislost o ≤ 1

- Dk:
  1) $k_e(G-e) \leq k_e(G)$:
     - je-li F minimální řez v G, pak $F \setminus \{e\}$ je hranový řez (ne nutně minimální) v $G-e$
     $$\Rightarrow k_e(G-e) \leq |F \setminus \{e\}| \leq |F| = k_e(G)$$
  2) $k_e(G)-1 \leq k_e(G-e)$:
     - je-li F minimální hranový řez v $G-e$, pak $F \cup \{e\}$ je hranový řez v G
     $$\Rightarrow k_e(G) \leq |F \cup \{e\}| = |F|+1 = k_e(G-e)+1$$

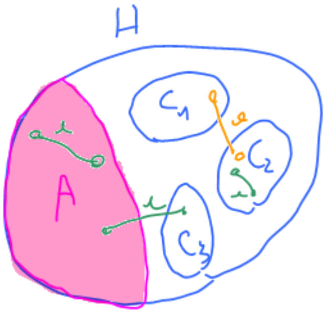
⊠

LEMMA 8.2:

∀ G = (V,E) ∀ e ∈ E: $k_v(G)-1 \le k_v(G-e) \le k_v(G)$

- čili i vrcholová souvislost také klesá o ≤ 1 po odebrání hrany

- DK:
  - předpokládejme, že $G \not\cong K_n$, jinak lze snadno ověřit
  - 1) $k_v(G-e) \le k_v(G)$:
    - je-li A minimální vrcholový řez v G, pak A je vrcholový řez i v G-e ⇒ $k_v(G-e) \le |A| = k_v(G)$
  - 2) $k_v(G)-1 \le k_v(G-e)$:
    - ukážeme, že pro H = G-e platí $k_v(H+e) \le k_v(H)+1$
    - protože $H \not\cong K_n$, tak ∃ vrcholový řez A v H takový, že $k_v(H)=|A|$
    - $C_1,\dots,C_n$ = komponenty grafu H - A
    - možnosti podle umístění hrany e:



případ a)
případ b)

a) e nespojuje 2 komponenty v H - A:
- tedy $e \cap A \neq \emptyset$ nebo $e \subseteq V(C_i)$ pro nějaké $i \in \{1,\dots,n\}$
- v H+e je A stále vrcholový řez ⇒ $k_v(H+e) \le |A| = k_v(H)$

b) e spojuje 2 komponenty v H - A: $|V(C_1)| \ge |V(C_2)|$
- BÚNO $e = \{x,y\}$, $x \in V(C_1)$, $y \in V(C_2)$
- je-li $n \ge 3$, pak A je stále vrcholový řez v H+e a máme $k_v(H+e) \le |A| = k_v(H)$
- tedy $n = 2$ (H-A má jen 2 komponenty C_1 a C_2)
- pokud $|V(C_1)| > 1$, pak $A \cup \{x\}$ je vrcholový řez v H+e ⇒ $k_v(H+e) \le |A \cup \{x\}| = |A|+1 = k_v(H)+1$
- jinak $|V(C_1)| = 1 = |V(C_2)|$ a platí

$$k_v(H+e) \le |V|-1 = |A|+1 = k_v(H)+1$$

z definice $k_v(G)$ platí pro každé $G \not\cong K_n$

$|A| = |V|-2$

⊠

DŮSLEDEK 8.3:

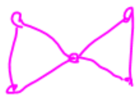
∀ G = (V,E): $k_v(G) \le k_e(G)$ (vrcholová souvislost je ≤ hranová souvislost)

DK:
- indukcí podle |E|
- $|E| < |V|-1 \Rightarrow k_e(G) = 0 \Rightarrow$ G je nesouvislý a $k_e(G) = 0 = k_v(G)$
- jinak máme $k_e(G) \ge 1$ a zvolme hranu $e \in E$ z min. hranového řezu v G
- potom $k_v(G)-1 \le k_v(G-e) \le k_e(G-e) = k_e(G)-1$

LEMMA 8.2 IP pro G-e volba e a LEMMA 8.1

⊠

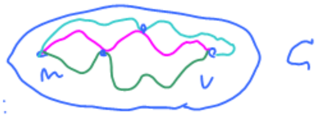
- nerovnost může být ostrá: „motýlek" M:



$k_e(M) = 2 > 1 = k_v(M)$

— VĚTA 8.4 (FORDOVA – FULKERSONOVA VĚTA):

$\forall G\ \forall t \in \mathbb{N}: k_e(G) \geq t \iff$ MEZI KAŽDÝMI 2 VRCHOLY GRAFU G $\exists \geq t$ HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST

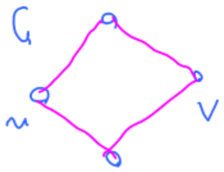


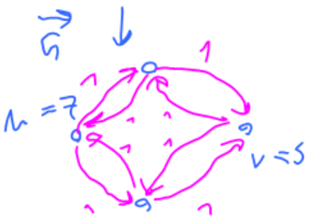
— DK:

1) $\Leftarrow$: — SPOREM – NECHŤ $\exists$ HRANOVÝ ŘEZ F V G SPLŇUJÍCÍ $|F| < t$

— POTOM 2 VRCHOLY V RŮZNÝCH KOMPONENTÁCH GRAFU $G - F$ JSOU STÁLE SPOJENY $\geq t - |F| \geq 1$ (HRANOVĚ DISJ.) CESTAMI $\Rightarrow$ SPOR

2) $\Rightarrow$: — MĚJME $G = (V, E)$ S $k_e(G) \geq t$ A VRCHOLY $u, v \in V$, KTERÉ CHCEME SPOJIT t HRANOVĚ DISJUNKTNÍMI CESTAMI





— Z G VYTVOŘÍME SÍŤ $(\vec{G}, u, v, 1)$ NAHRAZENÍM KAŽDÉ HRANY $\{x, y\} \in E$ ZA (x, y) A (y, x), ZVOLENÍM ZDROJE $z = u$, STOKU $s = v$ A NASTAVENÍM JEDNOTKOVÝCH KAPACIT U VŠECH HRAN

— PODLE VĚTY O CELOČÍSELNOSTI V TÉTO SÍTI EXISTUJE MAXIMÁLNÍ CELOČÍSELNÝ TOK f

— f NABÝVÁ JEN HODNOT 0 A 1 A JE-LI , TAK NASTAVÍME  (TÍM SE VELIKOST TOKU NEMĚNÍ)

— PODLE HLAVNÍ VĚTY O TOCÍCH $\exists$ MIN. ŘEZ R S $c(R) = w(f)$

— POTOM $F = \{\{x, y\} : (x, y) \in R$ NEBO $(y, x) \in R\}$ JE HRANOVÝM ŘEZEM V G

↳ PROTOŽE R JE ŘEZEM V SÍTI A CESTA Z u, v V $G \Rightarrow$ OR. CESTA Z u DO v V SÍTI

— DOSTÁVÁME:

$$\underbrace{t \leq |F|}_{k_e(G) \geq t} \underbrace{\leq c(R)}_{\text{VOLBA } F} = w(f) \text{ A TEDY } w(f) \geq t$$

— NYNÍ INDUKCÍ PODLE $w(f)$ ZKONSTRUUJEME t CEST MEZI u A v:

— $w(f) = 1$ — PAK $\exists$ CESTA MEZI u A v, KDE NA KAŽDÉ HRANĚ TEČE 1

— $w(f) > 1$:

— $\exists$ CESTA P MEZI u A v, KDE NA KAŽDÉ HRANĚ TEČE 1 A TOK PO NÍ VYNULUJEME $\Rightarrow$ NA ZBYLÉM TOKU VELIKOSTI $\geq t - 1$ Z IP NAJDEME $\geq t - 1$ HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST MEZI u A v

— P JE S TĚMITO CESTAMI HRANOVĚ DISJUNKTNÍ, PROTOŽE NEMÁME 

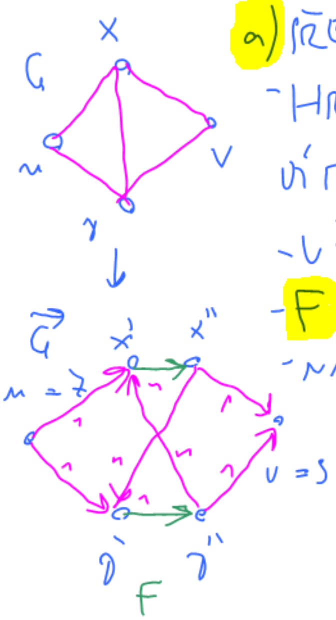
$\boxtimes$

— VARIANTA FORDOVY-FULKERSONOVY VĚTY PLATÍ I PRO VRCHOLOVOU SOUVISLOST

- **VĚTA 8.5 (MENGEROVA VĚTA):** (4)

$\forall G\ \forall t \in \mathbb{N}: k_v(G) \geq t \iff$ mezi každými 2 vrcholy grafu G $\exists \geq t$ vrcholově disjunktních cest (mimo u, v)

- **DK:**
  - **1)** $\Leftarrow$:
    - spor – nechť $k_v(G) < t$ pro graf $G = (V, E)$
    - potom buď $G \equiv K_n$ pro $n \leq t$ nebo $\exists$ vrcholový řez $A \subseteq V$ velikosti $< t$
      - ($G \equiv K_n$) nenastane, protože pak $\nexists$ t vrcholově disjunktních cest mezi dvěma vrcholy
      - (řez A) nenastane, protože na rozpojení $\geq t$ vrcholově disjunktních cest v G je potřeba vrcholový řez velikosti $\geq t$ $\Rightarrow$ spor
  - **2)** $\Rightarrow$:
    - nechť $k_v(G) = t$ pro graf $G = (V, E)$, chceme najít t vrcholově disjunktních cest mezi dvěma vrcholy $u, v \in V$
    - **a)** předpokládejme nejdřív $\{u, v\} \notin E$



    - hrany G zdvojíme ($x \circ\!\!-\!\!\circ y \to x \circ \rightleftarrows \circ y$), pouze hrany $\{u, x\}$ nahradíme hranami (u, x) a hrany $\{v, y\}$ nahradíme hranami (y, v)
    - všechny vrcholy kromě u a v pak zdvojíme:

tyto hrany „simulují" vrcholy grafu G

    - $F = \{$hrany vzniklé zdvojením vrcholů$\}$
    - nastavme $z = u$ jako zdroj a $s = v$ jako stok
      - všem hranám nastavíme jednotkové kapacity
        $\Rightarrow$ síť $(\vec{G}, u, v, \mathbb{1})$
      - podle **věty o celočíselnosti** ve vzniklé síti existuje tok f maximální velikosti $w(f)$
      - f nabývá jen hodnot 0 a 1
    - podle **hlavní věty o tocích** v síti existuje řez R minimální kapacity $c(R) = w(f)$
    - můžeme būno předpokládat $R \subseteq F$
      - jinak lze hranu e z $R \setminus F$ nahradit hranou z F, se kterou sdílí vrchol
      - jediný případ, kdy by e nešlo nahradit, je $e = \{u, v\}$, to je ale zakázané podle našeho předpokladu $\{u, v\} \notin E$
    - je-li $|R| \geq t$, pak podobně jako v předešlém důkazu najdeme t hranově disjunktních cest v síti mezi u a v
      - tedy indukcí podle $c(R) = w(f)$

- SPOREM - NECHŤ $|R|<t$ (5)
  - POTOM $A = \{x \in V : (x', x'') \in R\}$ JE VRCHOLOVÝM ŘEZEM V G A PLATÍ $|A| < t$
    $\Rightarrow$ SPOR S $k_v(G) \geq t$
- ZBÝVÁ Z t HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST V SÍTI MEZI u A v ZKONSTRUOVAT t VRCHOLOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST V G
  - Z CESTY $(u, x_1', x_1'', x_2', x_2'', \dots, v)$ V SÍTI VYPUSTÍME CESTU $(u, x_1, x_2, \dots, v)$
  - VZNIKLÉ CESTY V G JSOU VRCHOLOVĚ DISJUNKTNÍ (MIMO u A v), JINAK DVĚ PŮVODNÍ CESTY V SÍTI SDÍLÍ HRANU Z F

b) POKUD $e = \{u, v\} \in E$, TAK UKÁŽEME STEJNÝ POSTUP PRO $G - e$ A $K \geq t-1$ NALEZENÝM POMOCÍ LEMMA 8.2
  - $k_v(G - e) \geq t-1$ POMOCÍ LEMMA 8.2 A LZE PŘIDAT VRCHOLOVĚ DISJUNKTNÍM CESTÁM (MIMO u A v) HRANU e JAKO t-TOU CESTU $\boxtimes$

- PROTOŽE NALÉZT TOK MAXIMÁLNÍ VELIKOSTI LZE V POLYNOMIÁLNÍM ČASE, TAK MÁME POLYNOMIÁLNÍ ALGORITMUS NA ZJIŠTĚNÍ $k_e(G)$ I $k_v(G)$