

- APLIKACE TOKŮ V SÍTÍCH:

-1) KÖNIGOVA - ESERVÁRYHO VĚTA:

- V GRAFU $G = (V, E)$ NAZVEME MNOŽINU $C \subseteq V$ VRCHOLOVÝM POKRYTÍM,
- POKUD $C \cap e \neq \emptyset$ PRO $\forall e \in E$
- ZISKAT MINIMÁLNÍ VELIKOST VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ JE NP-TĚŽKÁ ÚLOHA
- PÁROVÁNÍM V G JE PODGRAF TVOŘENÝ DISJUNKTIVNÍMI HRANAMI

- VĚTA 7.1 (KÖNIGOVA - ESERVÁRYHO VĚTA, 1931):

V BIPARTITNÍM GRAFU JE VELIKOST MIN. VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ ROVNA VELIKOSTI MAXIMÁLNÍHO PÁROVÁNÍ
 ↳ CO DO POČTU HRAN

- URČIT VELIKOST MAX. PÁROVÁNÍ V OBEČNÉM GRAFU LŽE V POLYNOMIÁLNÍM ČASE
 ⇒ MÁME POLYNOMIÁLNÍ ALGORITMUS PRO NALEZENÍ MIN. VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ

- UK:

PRO BIPARTITNÍM GRAFŮM
 - Z BIPARTITNÍHO $G = (A \cup B, E)$ VYTVOŘÍME SÍŤ PŘIDÁNÍM ZOBROZE
 Z, STOKY s A HRAN (z, u) PRO $\forall u \in A$
 (v, s) PRO $\forall v \in B$

- HRANŮM $z \in E$ ZORIENTUJEME Z A DO B A VŠEM NOVÝM HRANÁM DÁME KAPACITU 1 A STARÝM HRANÁM KAPACITU $\infty = |A| + |B|$

HLAVNÍ VĚTA O TOKŮCH

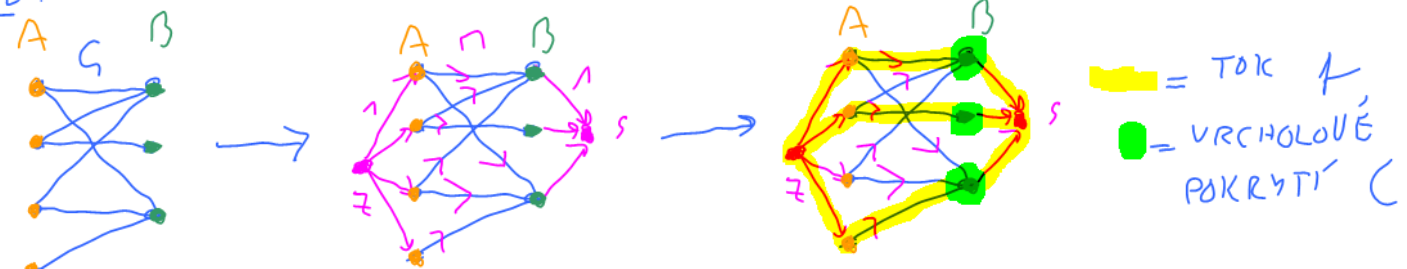
- PODLE VĚTY 6.2 \exists MAX. TOK f A MIN. ŘEZ R S $w(f) = c(R)$

- f JE CELOČÍSELNÝ PODLE VĚTY 6.6 → VĚTA O CELOČÍSELNOSTI

- 1) $w(f)$ = VELIKOST MAX. PÁROVÁNÍ V G
 - STARÉ HRANŮM S NENULOVÝM TOKEM TVOŘÍ PÁROVÁNÍ V G
- 2) $c(R)$ = VELIKOST MIN. VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ V G
 - ŘEZ R NEPOUŽÍVÁ STARÉ HRANŮ, PROTOŽE JEJICH KAPACITA ∞ JE VĚŠŠÍ NEŽ KAPACITA ŘEZU $\{(z, u) : u \in A\}$
 ⇒ VRCHOLY Z A U B INKLUZIVNÍ S HRANAMI R TVOŘÍ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ VELIKOSTI $c(R)$
 - NAOPAK NOVÉ HRANŮ INKLUZIVNÍ S VRCHOLY Z VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ
 $C \subseteq A \cup B$ GRAFU G TVOŘÍ ŘEZ KAPACITY $|C|$



- PŘÍKLAD:



2) HALLOVA VĚTA:

- NEJDE KONEČNÉ MNOŽINY X A I
- MNOŽINOVÝ SYSTÉM \mathcal{M} JE $(\Pi_i : i \in I)$, KDE $\Pi_i \subseteq X$
 ↳ MNOŽINY Π_i NEPUSÍ BÝT NUTNĚ RŮZNÉ

- SYSTÉM RŮZNÝCH REPREZENTANTŮ (SRR) PRO \mathcal{M} JE PROSTĚ ZUBROZENÍ

$f : I \rightarrow X$ TAKOVÉ, ŽE $\forall i \in I : f(i) \in \Pi_i$
 - Tedy f JE VÝPĚR JEDNOHO PRVKU Z KAŽDÉ Π_i TAKOVÝ, ŽE ŽÁDNÝ PRVEK NEVYŠERĚNE VÍCKRÁT



- INCIDENČNÍ GRAF SYSTÉMU \mathcal{M} JE BIPARTIČNÍ GRAF $G_m = (I \cup X, E)$, KDE $E = \{ \{i, x\} : i \in I, x \in X, x \in \Pi_i \}$

- VŠIMNĚTE SI, ŽE \mathcal{M} MÁ SRR $\Leftrightarrow G_m$ OBSAHUJE PŘÍSLŮŠNÉ VELIKOSTI $|I|$

- VĚTA 7.2 (HALLOVA VĚTA):

\mathcal{M} MÁ SRR $\Leftrightarrow \forall J \subseteq I : \left| \bigcup_{j \in J} \Pi_j \right| \geq |J|$
 HALLOVA PODMÍNKA

- Tedy OČIVIDNĚ NUTNÁ PODMÍNKA PRO EXISTENCI SRR JE I DOSTAČITELNÁ
- TAKÉ ZVANÉ "HALL'S MARRIAGE THEOREM", DOKÁZAL PHILIP HALL (1904-1982) V ROCE 1935

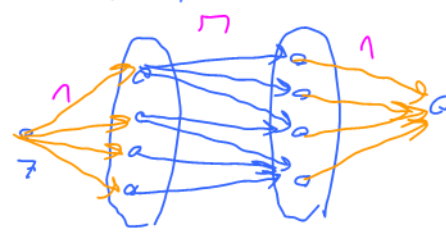
- DŮK:

(1) \Rightarrow :

- NECHŤ PRO \mathcal{M} EXISTUJE SRR f
- ZVOLTE $J \subseteq I$ A UVAŤME $\{ \Pi_j : j \in J \}$
- MÁME $\left| \bigcup_{j \in J} \Pi_j \right| \geq \left| \{ \Pi_j : j \in J \} \right| = |J|$ A Tedy PLATÍ HALLOVA PODMÍNKA
 ↳ $\Pi_j \in \Pi_j$ PRO $\forall j \in J$ ↳ JE PROSTĚ

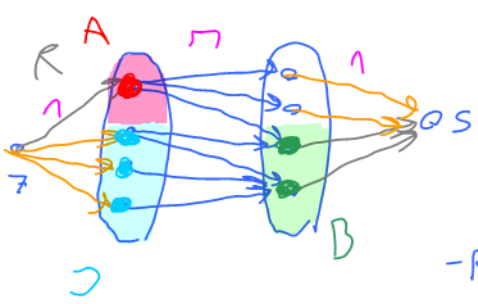
(2) \Leftarrow :

- NECHŤ PLATÍ HALLOVA PODMÍNKA, CHCEME NAJÍT SRR
- Z G_m VYTVOŘÍME SÍŤ PŘÍSLŮŠNÝ ZOBRAZENÍ f A HRAN (z, i) PRO $i \in I$ PŘÍSLŮŠNÝM STOKEM s A HRAN (x, s) PRO $x \in X$ DELEKACÍ HRAN Z I DO X PŘÍSLŮŠNÝM KAPACITOU 1 PRO NOVÉ HRANŮ A $\Pi = |I| + |X|$ PRO STARÉ



- PODLE VĚTY 6.2 \exists V SÍŤI MAX. TOK g A NIM. ŘEŠ R S $w(g) = c(R)$
- PODLE VĚTY 6.6 JE TOK g CELČÍSLEČNÝ

- \rightarrow VLASTNĚ NĚ VÍME, ŽE ŘEŠ R POUŽÍVÁ JEN NOVÉ HRANY
 - \rightarrow VLASTNĚ KAPACITA A CELUČÍSELNOSTI g PO KAŽDÉ HRANĚ JEJE 0 NEBO 1



- DEFINICE $A = \{i : (i, j) \in E\}$
 $B = \{x : (x, s) \in E\}$
 $J = I \setminus A$

- R JE ŘEŠ \Rightarrow HRANY $J \rightarrow$ VEDOU JEN DO B

$|\cup_{j \in J} \Gamma_j| \geq |J|$ PO DLE HALLOVY PODMÍNKY

$\Rightarrow \cup_{j \in J} \Gamma_j \subseteq B$

- KAPACITA ŘEŠ R TAK SPLŇUJE

$c(R) = |A| + |B| = |I| - |J| + |B| \geq |I| - |J| + |\cup_{j \in J} \Gamma_j| \geq |I|$
KAPACITA NOVÝCH HRAN JSOU 1 $J = I \setminus A$ PO KAŽDÉ HRANĚ g JEJE 0 NEBO 1

- PROTOŽE $w(g) = c(R)$, TAK VELIKOST TOKU g JE A SPŮJ $|I|$

- DEFINUJEME-LI $f: I \rightarrow X$ PŘEOUPÍKEM $f(i) = x$, KDE $g(i, x) = 1$, POK

f BUDE SRR PRO M - f JE ZOBRAZENÍ, PROTOŽE $w(g) \geq |I|$ A $g(i, e) \in \{0, 1\}$
 - f JE POUSTĚ, PROTOŽE JINAK TOK VELIKOSTI ≥ 2 NEMĚ KUDY UBTĚÍT DO S



- $f(i) \in \Pi_x$, PROTOŽE $(i, x) \in E(G_m) \Leftrightarrow x \in \Pi_x$ ⊗

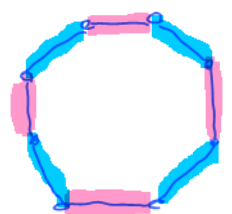
PŮVNĚNÍ K HALLOVĚ VĚTĚ:

- SPŮSTA APLIKACÍ
- S AXIOMEM VÝBĚRU LZE DOKÁZAT VARIANTU S KONEČNÍMI Π_i A NEKONEČNÍMI I, X
- S NEKONEČNÍMI Π_i, I A X HALLOVA VĚTA PLATÍ NEBOUŠÍ
- HALLOVA PODMÍNKY MÁ EXPONENCIÁLNĚ MNOHO PODMÍNEK, ALŽ SRR LZE POUČÍ TŮKOU MAJÍ V POLYNOMIÁLNÍ ČASE

3) ROZŠIŘOVÁNÍ LATINSKÝCH ODDĚLNÍKŮ:

DŮSLEDEK 7.3:

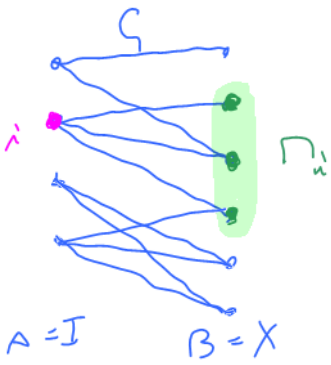
V KAŽDEM BIPARTITNÍM GRAFU $G = (A \cup B, E)$ S $E \neq \emptyset$ A $\deg_G(x) \geq \deg_G(y)$ PRO KAŽDÉ $x \in A, y \in B$ EXISTUJE PÁROVÁNÍ VELIKOSTI $|A|$ \rightarrow = STUPEŇ URCHOU y V GRAFU G



- ITEROVÁNÍM DŮSLEDKU 7.3 MÁ k REGULÁRNÍ BIPARTITNÍ GRAFU G LZE ROZŠŮIT $E(G)$ NA k DISJUNKTIVNÍCH PÁROVÁNÍ
 - TO PROTO, ŽE PAK $k \cdot |A| = |E| = k \cdot |B|$

- OK:

- uvažme množinu systémů $m = \{\Gamma_i : i \in I = A\}$, kde $\Gamma_i \subseteq X = B$ je sousedství vrcholu $i \in A$ v grafu G (tedy $\Gamma_i = \{x : (i, x) \in E\}$)
- v m platí Hallova podmínka:



- pro $J \subseteq I$ je $\cup_{j \in J} \Gamma_j$ množina vrcholů z B , které mají ≥ 1 souseda v J
- označme $k_1 = \min_{j \in I} d_G(j)$ a $k_2 = \max_{x \in \cup_{j \in I} \Gamma_j} d_G(x)$
- z předpokladů platí $k_1 \geq k_2$
- počít Z množin $J \subseteq A$ a $|\cup_{j \in J} \Gamma_j|$ v G
- splňuje $k_1 \cdot |J| \leq Z \leq k_2 \cdot |\cup_{j \in J} \Gamma_j|$
- a z $k_1 \geq k_2$ je tak $|J| \geq |\cup_{j \in J} \Gamma_j| \Rightarrow$ Hallova podmínka platí

Hallova věta

Věta 7.2 $\Leftrightarrow \exists$ SRR \uparrow pro m a \uparrow definice m je \uparrow řádová v $G = G_m$ velikosti $|A|$ \boxtimes
 $E \neq \emptyset \Rightarrow k_1, k_2 \geq 1$

LATINSKÝ OBDELNÍK typu $k \times m$ pro k, m je tabulka s k řádky a m sloupci vpravo symboly $1, \dots, m$ tak, že se v řádkách a sloupcích žádný symbol neopakuje

1	2	3	4	5	6
3	1	5	6	2	5
4	3	6	5	1	2

Věta 7.4:

každý latinský obdélník typu $k \times m$ lze uplnit na latinský čtverec řádu m

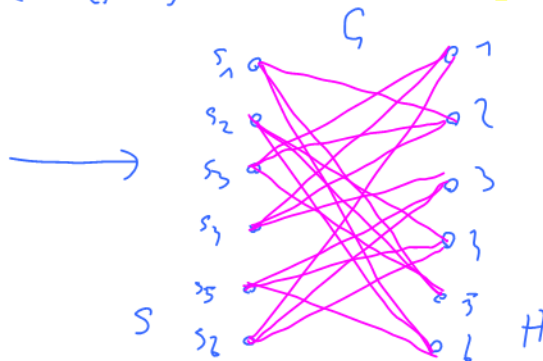
- OK:

- přejme latinský obdélník O typu $k \times m$, buď $k < m$
- rozšíříme O na $k+1$ řádků
- uvažme bipartitní graf $G = (S \cup H, E)$, kde $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ je množina sloupců O , $H = \{1, \dots, m\}$ je množina hodnot, že kterých bude ve vpravo $(k+1)$ -ní řádek a $E = \{(s_i, x) : x \neq s_i\}$

trojúhelník:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
1	2	3	4	5	6
3	1	5	6	2	5
4	3	6	5	1	2

$m = 6, k = 3$



\times není výsledkem S

- PRO KAŽDÉ $s \in S$ PLATÍ $\deg_S(s) = m - k$, PROTO ŽE VE SLUPCI s : NEJÍ POUŽITO PŘÁVĚ $m - k$ HUČNOST $\neq H$ (5)
- PRO KAŽDÉ $x \in H$ PLATÍ, ŽE $\deg_S(x) = m - k$, PROTOŽE x SE VYSKYTUJE V KAŽDÉM $\neq k$ ŘÁDKU PŘÁVĚ NEBOU A POKAŽDÉ V JINÉM SLUPCI A TĚDY x CHYBÍ V PŘÁVĚ $m - k$ SLUPCÍCH OSUČLNÍKŮ 0
- JSOU SPLENĚNÝ PŘEUPOKLAUD **DŮSLEDKU 7.3**, PODLE KTERÉHO U S EXISTUJE PÁROVÁNÍ VELIKOSTI $|S| = m$
- TUTO PÁROVÁNÍ OSUČNÝ $(k+1)$ -TÍ ŘÁDEK RUŽŠIŘENÍ (0 NA LATINSKÝ OSUČLNÍK TYPY $(k+1) \times m$ 