Toky v sítích:

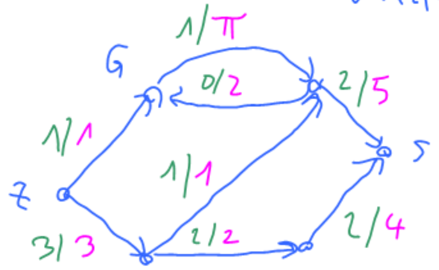
- **síť** je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf (tedy $E \subseteq V \times V$), $z \in V$ je **zdroj**, $s \in V$ je **stok** (platí $z \neq s$) a $c: E \to \mathbb{R}_0^+$.
  Hodnotu $c(e)$ nazýváme **kapacitou** hrany $e \in E$

je dovoleno i

- **tok** v síti $(G = (V, E), z, s, c)$ je $f: E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující následující podmínky:
  a) $\forall e \in E: \ 0 \leq f(e) \leq c(e)$ (velikost toku na hraně je omezena kapacitou)
  b) $\forall u \in V \setminus \{z, s\}: \ \sum_{v:(u,v) \in E} f(u,v) - \sum_{v:(v,u) \in E} f(v,u) = 0$

  (**1. Kirchhoffův zákon** – co přiteče do vrcholu $v \neq z, s$ musí odtéct a obráceně)

- **velikost toku** f je $w(f) = \sum_{v:(z,v) \in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z) \in E} f(v,z)$
- příklad:



kapacity hran c
tok f
velikost toku f je $w(f) = 4$

- chceme nalézt tok maximální velikosti
  - motivace: voda v trubkách, datový přenos, peněžní toky, dopravní sítě...
  - existuje vůbec maximální tok? (toků je nekonečně mnoho a $f(e) \in \mathbb{R}$)
- **tvrzení 6.1**: pro každou síť existuje maximální tok
  - dk (nástin):
    - z analýzy víme, že spojitá funkce na kompaktní množině nabývá maxima
    - množina $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^{|E|}$ všech toků je kompaktní a funkce $w: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je spojitá $\boxtimes$
- dále uvidíme, toky souvisí s řezy v síti

- **řez v síti** (G, z, s, c) je $R \subseteq E$ taková, že každá orientovaná cesta ze zdroje z do stoku s používá aspoň jednu hranu z R
  - speciálně hrany vycházející ze z či hrany vcházející do s tvoří řez
- **kapacita řezu** R je $c(R) = \sum_{e \in E} c(e)$
- řezů je jen konečně mnoho $\Rightarrow$ jistě existuje řez minimální kapacity

- NYNÍ VYSLOVÍME DŮLEŽITÝ VÝSLEDEK O TOCÍCH

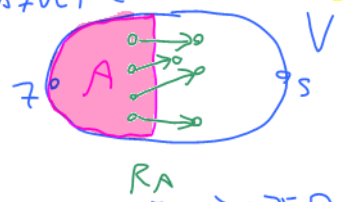
- **VĚTA 6.2 (HLAVNÍ VĚTA O TOCÍCH):**

  VELIKOST MAXIMÁLNÍHO TOKU = KAPACITA MINIMÁLNÍHO ŘEZU

  NEBOLI PRO KAŽDOU SÍŤ PLATÍ: $\max w(f) = \min c(R)$

  f TOK, R ŘEZ

- PŘED SAMOTNÝM DŮKAZEM UVEDEME NĚKOLIK UŽITEČNÝCH POJMŮ A TVRZENÍ
- ZAČNEME PODROBNĚJŠÍM STUDIEM ŘEZŮ
- PRO $A \subseteq V$, KDE $z \in A$ A $s \notin A$, NAZVEME MNOŽINU $R_A = \{e = (u,v) \in E : u \in A, v \notin A\}$ **ELEMENTÁRNÍM ŘEZEM**



  - VŠIMNĚME SI, ŽE R_A JE SKUTEČNĚ ŘEZEM, PROTOŽE KAŽDÁ ORIENTOVANÁ CESTA ZE z DO s OBSAHUJE HRANU Z R_A (MUSÍ OPUSTIT A)

- **POZOROVÁNÍ 6.3:**

  KAŽDÝ ŘEZ R OBSAHUJE ELEMENTÁRNÍ ŘEZ

  DK:
  - ZVOLME A JAKO MNOŽINU VRCHOLŮ DOSAŽITELNÝCH PO ORIENTOVANÉ CESTĚ ZE ZDROJE V GRAFU $(V, E \setminus R)$
  - POTOM $z \in A$, $s \notin A$, PROTOŽE R JE ŘEZ $\Rightarrow R_A$ EXISTUJE
  - $(u,v) \in R_A \iff u \in A, v \notin A \Rightarrow (u,v) \in R$

    KDYBY $(u,v) \notin R$, PAK $v \in A$, PROTOŽE JE DOSAŽITELNÉ ZE z PO ORIENTOVANÉ CESTĚ
  - TEDY $R_A \subseteq R$ ⊠

- **POZOROVÁNÍ 6.4:**

  KAŽDÝ V INKLUZI MINIMÁLNÍ ŘEZ R JE ELEMENTÁRNÍ

  ↳ NEBOLI $R \setminus \{e\}$ NENÍ ŘEZEM PRO $\forall e \in R$

  DK:
  - PODLE POZOROVÁNÍ 6.3 MUSÍ R OBSAHOVAT ELEMENTÁRNÍ ŘEZ $R_A \subseteq R$ ⊠
  - Z MINIMALITY PLATÍ $R = R_A$

– NYNÍ UVEDEME POSLEDNÍ POMOCNÝ VÝSLEDEK PŘED DŮKAZEM VĚTY 1

– **LEMMA 6.5:**
JE-LI f TOK A R_A ELEMENTÁRNÍ ŘEZ, PAK PLATÍ

$$w(f) = \sum_{\substack{u\in A,\, v\notin A \\ (u,v)\in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\in A,\, v\notin A \\ (v,u)\in E}} f(v,u)$$

DK:

$$- \underset{\text{DEFINICE } w(f)}{w(f) =} \sum_{u:(z,u)\in E} f(z,u) - \sum_{u:(u,z)\in E} f(u,z)$$

– PRO $u \in A,\ u \neq z$ MÁME $\underset{\text{1. KIRCHHOFFŮV ZÁKON PRO } f}{0 =} \sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) - \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$

– DOHROMADY DOSTÁVÁME:

$$w(f) = \sum_{u\in A} \underbrace{\left(\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) - \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u) \right)}_{= \begin{cases} 0 & \text{PRO } u \neq z \\ w(f) & \text{PRO } u = z \end{cases}} \overset{\text{ROZDĚLIT NA PŘÍPADY}}{=}$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{u,v\in A \\ (u,v)\in E}} \Big(f(u,v) - f(v,u) \Big)}_{\substack{=0,\ \text{PROTOŽE LZE PROHODIT } u \text{ A } v \text{ A} \\ \text{SPÁROVAT TOK PŘÍBYTKY S ÚBYTKY}}} + \sum_{\substack{u\in A,\, v\notin A \\ (u,v)\in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\in A,\, v\notin A \\ (v,u)\in E}} f(v,u)$$

☒

– DK VĚTY 6.2:
– CHCEME UKÁZAT $\max_{f \text{ TOK}} w(f) = \min_{R \text{ ŘEZ}} c(R)$ ⇒ JE TŘEBA UKÁZAT 2 NEROVNOSTI

(:) „≤":
– MĚJME LIBOVOLNÝ TOK f A ŘEZ R, CHCEME UKÁZAT $w(f) \leq c(R)$
– PODLE POZOROVÁNÍ 6.3 ŘEZ R OBSAHUJE ELEMENTÁRNÍ ŘEZ R_A PRO NĚJAKÉ $A \subseteq V$, $z \in A$, $s \notin A$, A PODLE LEMMA 6.5 PLATÍ

$$w(f) = \sum_{\substack{u\in A,\, v\notin A \\ (u,v)\in E}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\in A,\, v\notin A \\ (v,u)\in E}} f(v,u) \underset{\substack{f(e)\geq 0 \\ \text{PRO } \forall e\in E}}{\leq} \sum_{\substack{u\in A,\, v\notin A \\ (u,v)\in E}} f(u,v) \underset{\substack{f(e)\leq c(e) \\ \text{PRO } \forall e\in E}}{\leq} \sum_{\substack{u\in A,\, v\notin A \\ (u,v)\in E}} c(u,v) \underset{\substack{\text{DEFINICE} \\ \text{KAPACITY} \\ \text{ŘEZU}}}{=} c(R_A) \underset{R_A \subseteq R}{\leq} \underline{c(R)}$$

(ii) „⇒":

- mějme tok f
- pro libovolnou cestu $P = (z = v_0, v_1, \dots, v_k)$ definujme číslo ε_P jako minimum z
$$\begin{cases} c(e) - f(e) & \text{pro } e = (v_i, v_{i+1}) \in E \quad \text{„po směru } P\text{"} \\ f(e) & \text{pro } e = (v_{i+1}, v_i) \in E \quad \text{„proti směru } P\text{"} \end{cases} \qquad i = 0, \dots, k-1$$

ne nutně orientovanou

- P je **zlepšující cestou**, pokud $v_k = s$ a $\varepsilon_P > 0$
- ukážeme, že **f je maximální $\Leftrightarrow$ pro f $\nexists$ zlepšující cesta**:

1) „⇒" pokud $\exists$ zlepšující cesta P, pak definujme $f' : E \to \mathbb{R}_0^+$ jako
$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \varepsilon_P & e = (v_i, v_{i+1}) \in E \\ f(e) - \varepsilon_P & e = (v_{i+1}, v_i) \in E \\ f(e) & \text{jinak} \end{cases}$$
- potom f' je tok a platí $w(f') = w(f) + \varepsilon_P > w(f)$

stačí ověřit podmínky z definice toku

$\Rightarrow f$ není maximální

2) „⇐" pokud $\nexists$ zlepšující cesta, pak zvolme

$A = \{z\} \cup \{u \in V : \exists \text{ cesta } P \text{ mezi } z \text{ a } u \text{ splňující } \varepsilon_P > 0\}$ a tedy $\exists$ elementární řez R_A

- $\nexists$ zlepšující cesta $\Rightarrow s \notin A$
- pro $\forall e\ (u, v) \in R_A$, $u \in A$, $v \notin A$ je $f(e) = c(e)$ a pro $\forall e = (v, u) \in E$, $u \in A$, $v \notin A$ je $f(e) = 0$

jinak $f(e) < c(e)$ a tedy $v \in A$ z definice A

jinak opět $v \in A$

- podle **Lemma 6.5** platí
$$w(f) = \sum_{\substack{u \in A,\, v \notin A \\ (u,v) \in E}} \underbrace{f(u,v)}_{= c(u,v)} - \sum_{\substack{u \in A,\, v \notin A \\ (v,u) \in E}} \underbrace{f(v,u)}_{= 0} = \sum_{e \in R_A} c(e) = c(R_A)$$

definice kapacity řezu

- čili pro f existuje řez R_A s $w(f) = c(R_A)$ a tedy podle části (i) je f maximální

- podle **Tvrzení 6.1** $\exists$ max. tok f a podle **(ii)** k němu $\exists$ řez R s $w(f) = c(R)$
- podle **(i)** je R minimální $\boxtimes$

- důkazem dostáváme algoritmus na nalezení max. toku

- **Fordův-Fulkersonův algoritmus:**
  1) nastav $f(e) = 0$ pro $\forall e \in E$
  2) dokud $\exists$ zlepšující cesta P, vylepši po ní tok o ε_P
  3) stávající tok f vrať jako maximální

- VĚTA 16 (VĚTA O CELOČÍSELNOSTI): JSOU-LI KAPACITY CELOČÍSELNÉ, PAK F.F. NAJDE MAX. TOK PO KONEČNĚ MNOHA KROCÍCH A NAVÍC MÁ TAKOVÝ TOK CELOČÍSELNOU VELIKOST

$\boxtimes$

DK: TOK SE VŽDY VYLEPŠÍ O CELÉ ČÍSLO $\varepsilon_P > 0$ A $w(f) < \infty$

- EXISTUJÍ SÍTĚ S IRACIONÁLNÍMI KAPACITAMI, NA KTERÝCH F.F. ALGORITMUS NEDOBĚHNE V KONEČNÉM POČTU KROKŮ (A ANI NEKONVERGUJE KE SPRÁVNÉMU VÝSLEDKU)
- V SÍTÍCH S CELOČÍSELNÝMI KAPACITAMI MÁ F.-F. ALGORITMUS ČASOVOU SLOŽITOST $O(w(f) \cdot (|V|+|E|))$, KDE f JE MAXIMÁLNÍ TOK
  - TO PROTO, ŽE V KAŽDÉM KROKU SE TOK VYLEPŠÍ O ≥ 1 A NALÉZT ZLEPŠUJÍCÍ CESTU JDE V ČASE $O(|V|+|E|)$
- F.F. ALGORITMUS NESPECIFIKUJE, JAKÉ ZLEPŠUJÍCÍ CESTY VYBÍRAT – VYBÍRÁME-LI NEJKRATŠÍ, DOSTANEME TZV. EDMONSŮV-KARPŮV ALGORITMUS PRO NALEZENÍ TOKU MAXIMÁLNÍ VELIKOSTI, KTERÝ MÁ ČASOVOU SLOŽITOST $O(|V| \cdot |E|^2)$