

KONEČNĚ PROJEKTIVNÍ ROVINY:

- ZAJÍMÁJÍCÍ JE NA NOVOU STRUKTURU - VELICE SYMETRICKÁ A UŽÁDNÁ (1)
- BUDE TO MOŽNĚJŠÍ SYSTÉM (HYPERGRAF - ZOBECNĚNÍ GRAFU, KDE HRANY MOHOU BÝT k -TICE PRO NĚJAKÉ $k \geq 2$)
- APLIKACE I V INFORMATICE - DOZVÍME SE V ČÁSTI O SAMOOPRAVNÝCH KÓDECH

- MOTIVACE PŘICHÁZÍ Z GEOMETRIE

EUKLEIDOVY AXIOMY

- 1) KAŽDÉ 2 BODY URČUJÍ PŘÍMKU
- 2) KAŽDOU ÚSEČKU LZE PRODLOUŽIT NA PŘÍMKU
- 3) KE ZVOLNĚNÝM BODŮM LZE OPSAT KRUŽNICI PROCHÁZÍCÍ OBLIČNÝM ŽADANÝM BODEM
- 4) VŠECHNY PRÁVÉ ÚHLY JSOU STEJNÉ
- 5) BODEM LZE K PŘÍMCE VĚST PRÁVĚ 1 ROVNOBĚŽKU

EUKLIDES Z ALEXANDRIE (275-210 př. n. l.)
 ΠΡΩΤΑ ΤΕΤΑΡΤΑ ΑΧΙΟΜΑΤΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
 "KNIZE, ŽE KLAVY" VYSTAVĚNA GEOMETRIE

- UVAŽUJEME PŘÍMKY JAKO MOŽNĚJŠÍ BODŮ - CO VÝSLEDNÝ MOŽNĚJŠÍ SYSTÉM (X, P) , $P \subseteq \mathcal{P}^X$, SPLŇNĚTE?

- 2 BODY URČUJÍ PŘÍMKU $(\forall x, y \in X, x \neq y \exists! p \in P : \{x, y\} \subseteq p)$
- 2 PŘÍMKY SE PROTÍNÁJÍ V ≤ 1 BODE: $\forall p, q \in P, p \neq q : |p \cap q| \leq 1$

- FANO PANO UKÁŽE, ŽE EXISTUJÍ KONEČNÉ OBSTĚRY SPLŇNÍCÍ SILNĚJŠÍ PŮVÍNKY $\omega / \chi < \omega$

DEFINICE:

KONEČNÁ MOŽNINA X A SYSTÉM P MOŽNĚJŠIN X TUVÍK **KONEČNĚ PROJEKTIVNÍ ROVINY** (X, P) POKUD SPLŇNĚTE TYTO 3 PŮVÍNKY:

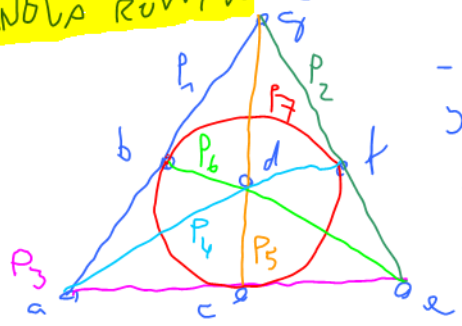
- (A1) $\forall x, y \in X, x \neq y \exists! p \in P : \{x, y\} \subseteq p$
 - KAŽDÉ 2 BODY URČUJÍ PŘÁVĚ JEDNU PŘÍMKU ("NEHÁNE ROVNOBĚŽKY")
- (A2) $\forall p, q \in P, p \neq q : |p \cap q| = 1$ **ROVNOST!**
 - KAŽDÉ 2 PŘÍMKY SE PROTÍNÁJÍ V PŘÁVĚ 1 BODE
- (A3) $\exists C \subseteq X, |C| = 4, \forall p \in P : |C \cap p| \leq 2$
 - EXISTUJÍ 4 BODY V OBECNÉ POLOZE

- (A1) A (A2) SAMA O SOBĚ NES-TAČÍ, PROTOŽE NEVYLICHZUJÍ NÁSLEDUJÍCÍ DEGENEROVANÉ PŘÍPADY:



PŘÍKLAD:

FANOVA ROVINA (7 BODŮ, 7 PŘÍMOK)



- BODY a, b, c, d JSOU V OBECNÉ POLOZE

(TĚMĚŘ VŠECHNY BODY NA PŘÍMCE)

- JEDNOZNAČNĚ URČENOU PŘÍMKU $P \in \mathcal{P}$ S $P \ni \{X, Y\}$ PRO DANÉ BODY $X, Y \in X$ S $X \neq Y$ OZNAČÍME TAKO \overline{XY}

TVĚZENÍ 4.1:

V KONEČNĚ PROJEKTIVNÍ ROVINĚ OBSAHUJE KAŽDÁ PŘÍMKA STEJNÝ POČET BODŮ.

- NESOLI $\forall P, Q \in \mathcal{P} : |P| = |Q|$

DK:

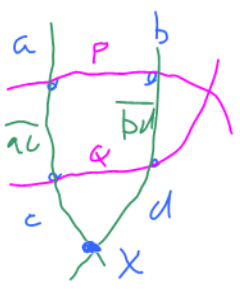
- NĚJDE PŘÍMKY $P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q$

- UKÁŽEME, ŽE \exists BOD $X \in X$ TAKOVÝ, ŽE $X \notin P$ A $X \notin Q$:

- UVAŽME PŘÍMKU $C \notin \mathcal{P}$, KTERÁ SPLŇUJE $|P \cap C| \leq 2$ A $|Q \cap C| \leq 2$

- POKUD $C \not\subseteq P \cup Q$, PAK JISTĚ NÁME HLEDANÉ X

- Tedy předpokládejme, že $P \cap C = \{a, b\}$ pro $a, b, c, d \in X$
 $Q \cap C = \{c, d\}$ (4 RŮZNÉ BODY)



- UVAŽME PŘÍMKY $\overline{ac}, \overline{bd} \in \mathcal{P}$

- POOLE (A2) EXISTUJE BOD $X \in \overline{ac} \cap \overline{bd}$

- POTOH $X \notin P$ A $X \notin Q$, PROTOŽE:

- POOLE (A2) JE $P \cap \overline{ac} = \{a\}$ A TUDY POKUD $X \in P$, PAK $X = a$, COŽ NELZE POOLE (A3), PROTOŽE PAK $\{X = a, b, d\} \subseteq \overline{bd}$

A TUDY $|\overline{bd} \cap C| \geq 3$

- ANALOGICKY DOSTANEME $X \notin Q$

- NYMÍ UKÁŽEME $|P| = |Q|$:

- NĚJDE BOD $X \notin P \cup Q$,
- DEFINUJME ZOBRAZENÍ $\varphi: P \rightarrow Q$ TAK, ABY $\varphi(Y) =$ BOD V PŘÍMCE PŘÍMKA \overline{XY} A Q



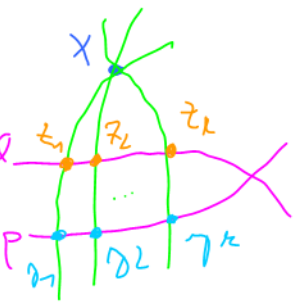
- POOLE (A2) JE $\varphi(Y)$ URČENĚ JEDNOZNAČNĚ

- φ JE PROSTĚ (A TUDY $|P| \leq |Q|$):

- NĚJDE $P = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$

- POTOH POOLE (A2) KAŽDÁ PŘÍMKA $\overline{X\gamma_i}$ PŘOJÍMÍ Q V JEDNOM BODĚ z_i

- φ JE PROSTĚ, PROTOŽE $z_i = z_j$ PRO $i \neq j$ BY ZNAMENALO, ŽE $\overline{X\gamma_i} \cap \overline{X\gamma_j} \ni X$ ODSAHUJE Z BODŮ $(X \wedge z_i = z_j)$, COŽ NELZE POOLE (A2)



- ANALOGICKY LZE KONSTRUOVAT PROSTĚ $\varphi: Q \rightarrow P$
 $\Rightarrow |Q| \leq |P|$ A TUDY $|P| = |Q|$



- ŘÁD PROJEKTIVNÍ ROVINY (X, P) JE $|P| - 1$ PRO $P \in \mathcal{P}$ (ŘÁD PÁNOVY ROVINY = 2)

- **TVRZENÍ 4.2:**
 JE-LI (X, \mathcal{P}) KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU m , PAK PLATÍ: (3)

1) KAŽDÝM BODEM PROCHÁZÍ PŘÁVĚ $m+1$ PŘÍMEK,

2) $|X| = m^2 + m + 1$,

3) $|\mathcal{P}| = m^2 + m + 1$.

- **DK:**

1) NĚKDE LIBOVOLNÝ BOD $x \in X$

- POTOM \exists PŘÍMKA $p \in \mathcal{P}$ TAKOVÁ, ŽE $x \notin p$, PROTOŽE:

- BUĎ C PLOŠINA 4 BODŮ $a, b, c, d \in X$ $\neq (A3)$

- BUĎO $x \notin \{a, b, c\}$

- POTOM BUĎ \overline{ab} NEBO \overline{ac} NEODSAHUJE x POULE $(A2)$

- UVAŽME PŘÍMKY $p \in \mathcal{P}$ TAKOVY, ŽE $x \notin p$

- BODEM x PROCHÁZÍ ASPOŇ $m+1$ PŘÍMEK:

- $|\mathcal{P}| = m+1$ POULE **TVRZENÍ 1** A PRO KAŽDÉ $y \in \mathcal{P}$ NĚKDE PŘÍMKA \overline{xy} PROCHÁZÍCÍ BODEM x (TYTO PŘÍMKY JSOU POULE $(A2)$ RŮZNÉ)

- BODEM x PROCHÁZÍ NAJEDNÝŠ $m+1$ PŘÍMEK:

- POULE $(A2)$ KAŽDÁ PŘÍMKA OBSAHUJÍCÍ x PROTÍNÁ p A JE TUDY ZAPočÍTÁMA NĚKDE $m+1$ PŘÍMEK \overline{xy} S $y \in \mathcal{P}$

2) NĚKDE LIBOVOLNOU PŘÍMKA $p \in \mathcal{P}$ A NECHŤ $P = \{x_1, \dots, x_{m+1}\}$

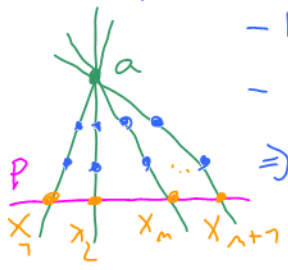
- POULE $(A3)$ EXISTUJE BOD $a \in X$ TAKOVÝ, ŽE $a \notin p$

- $|X| \geq m^2 + m + 1$:

- KAŽDÁ PŘÍMKA $\overline{ax_i}$ MÁ m BODŮ MIMO a

- KAŽDÉ 2 PŘÍMKY $\overline{ax_i}$ A $\overline{ax_j}$ POULE $(A2)$ SDÍLEJÍ JEEN BOD a

$\Rightarrow |X| \geq 1 + \sum_{i=1}^{m+1} (|\overline{ax_i}| - 1) = 1 + (m+1) \cdot m = \underline{\underline{m^2 + m + 1}}$



- $|X| \leq m^2 + m + 1$:

- KAŽDÝ BOD $x \in X \setminus \{a\}$ LEŽÍ NA NĚKTERÉ PŘÍMCE $\overline{ax_i}$, PROTOŽE POULE $(A2)$ PŘÍMKA \overline{ax} PROTÍNÁ p V NĚKTERÉM BODĚ x_i

A POULE $(A1)$ PAK PLATÍ $\overline{ax} = \overline{ax_i}$

3) PLYNE ŽE 2) A ŽE **DUALITY** (UVIOLINE)



DUÁLITA KONĚČNÝCH PROJEKTIVNÍ ROVIN:

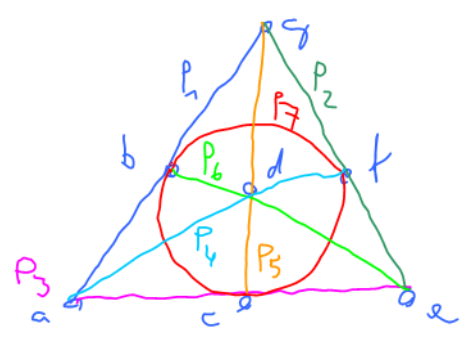
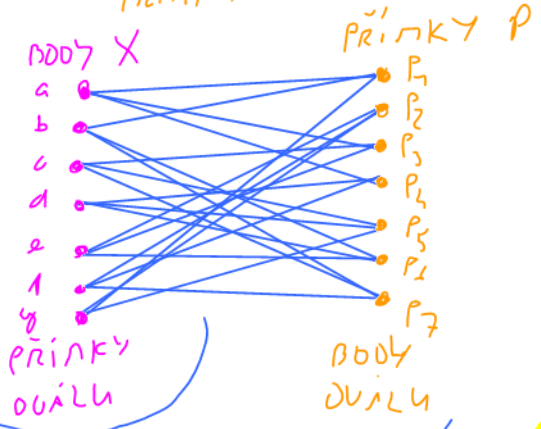
- „PŘECHOD Z PŘÍNEK NA BODY A Z BODŮ NA PŘÍNKY“
- **DUÁLNÍ MNOŽINOVÝ SYSTÉM** K MNOŽINOVÉMU SYSTÉMU (X, P) JE

$(P, \{ \{ P \in P : X \in P \} : X \in X \})$ (ZKRÁCENĚ „**DUÁL** (X, P) “)

BODY DUÁLU = PŘÍNKY P

PŘÍNKY DUÁLU = MNOŽINY PŘÍNEK X OBSAHUJÍCÍ TÝŽ BOD

- **GRAF INCIDENCE**:
(PŘÍKLAD PRO PĚTI ROVIN)



HRANY $\{X, P\}$
KDE $X \in P$

TVRZENÍ 4.3:

DUÁLE K KONĚČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY ŘÁDU m JE KONĚČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU m .

- OK:

- Ověříme axiomy $(A1), (A2), (A3)$ v duálu k (X, P)

- **(A1)** - CHCEME UKÁZAT, ŽE KAŽDÉ DVA BODY V DUÁLU GEOMETRIČNĚ URČÍ PŘÍNKU V DUÁLU

- TO JE TOTÉŽ JAKO UKÁZAT, ŽE $\forall P, Q \in P, P \neq Q \exists! X \in X : X \in P \cap Q$ - TO JE PŘESNĚ ZNĚMÍ **(A2)** PRO (X, P)

↳ PŘÍMĚ $P, Q \in \{ S \in P : X \in S \}$, PŘEM P, Q LEŽÍ V PŘÍMICE DUÁLU GEOMETRIČNĚ URČENÉ BODEM $X \in X$

- **(A2)** - CHCEME UKÁZAT, ŽE KAŽDÉ DVA PŘÍNKY V DUÁLU SE PROTIKÁJÍ V PŘÍMĚ GEOMETRIČNĚ URČENÉ BODEM V DUÁLU

- TO JE TOTÉŽ JAKO UKÁZAT, ŽE $\forall X, Y \in X, X \neq Y \exists! P \in P : \{X, Y\} \subseteq P$ - TO JE PŘESNĚ ZNĚMÍ **(A1)** PRO (X, P)

↳ PŘÍMĚ $\{ S \in P : X \in S \} \cap \{ S \in P : Y \in S \} = \{ \overline{XY} \} = \{ P \}$

- **(A3)** - JE-LI $C = \{ a, b, c, d \}$ MNOŽINA Z **(A3)** PRO (X, P) , PAK $C' = \{ \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{ad} \}$ JE PŘÍSLUŠNÁ MNOŽINA V DUÁLU
- TO PROTO, ŽE Z KAŽDÉ TROJICE PŘÍNEK MAJÍ DŮVĚ PŘÍNKU BODY KTERÝ NELEŽÍ VE TŘETÍ \Rightarrow ŽÁDNÉ TŘI PŘÍNKY V C NELEŽÍ V TÉŽE PŘÍMICE V DUÁLU

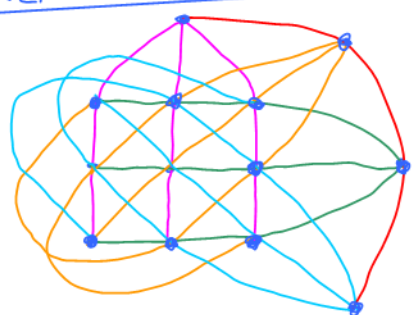
- ZALHOVNÍ ŘÁDU PLYNE Z ČÁSTI 1) TVRZENÍ 4.2 PROTOŽE VELIKOST DUÁLNÍ PŘÍNKY SE ROVNÁ POČTU PŘÍNEK P PROUJÍDĚJÍCÍCH BODEM Z X \square

- ČÁST 3) Z TVRZENÍ 2 PAK PLYNE PŘÍMĚ Z ČÁSTI 2) A **TVRZENÍ 4.3**

EXISTENCE KONEČNÝCH PROJEKTIVNÍCH ROVIN:

- KROKĚ FAKTORY ROVINY ŽÁDÁNÍ NEZNÁME ŽÁDNÉ PŘÍKLADY KONEČNÝCH PROJEKTIVNÍCH ROVIN

- PŘÍKLAD (KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU 3):



$13 = 3^2 + 3 + 1$ BODŮ

13 PŘÍMOK

KAŽDÁ PŘÍMKA MÁ 4 BODY

KAŽDÝ BOD JE OBSAŽEN VE 4 PŘÍMkách

- PRO KAŽDÁ $m \in \mathbb{N}$ EXISTUJÍ KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY ŘÁDU m ?

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
EXISTENCE	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓	?
					↓ DOKÁZAL TARRY (1900)				↓ DOKÁZAL ROTH (1949)		

ODPOVĚDKA:

KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY ŘÁDU m EXISTUJÍ $\Leftrightarrow m$ JE SOUKLONNÁ PRVOČÍSLA

- STÁLE OTEVŘENÉ

- IMPLIKACE " \Leftarrow " JE ZNÁMA (UJÍTE SE PRO TAKOVÁ m ZKONSTRUOVAT)

- NAPŘ. PRO $m=9$ \exists 4 NEIZOMORFNÍ KONEČNÉ PROJEKTIVNÍ ROVINY

EXISTUJÍ $\Leftrightarrow m$ JE SOUKLONNÁ PRVOČÍSLA A JSOU VZÁJEMNĚ JEDNOTKOVĚ NEZÁVISLÉ

VĚTA 4.4:

POKUD EXISTUJE ALGEBRAICKÉ TĚLESO \mathbb{F}_m PRVOČÍSLA, POTOM EXISTUJE KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ ROVINA ŘÁDU m

- KONSTRUKCE PUNKTŮ MAU KAŽDÝM TĚLESEM A NAPŘÍKLAD MAU JE UJÍTA REÁLNÍ PROJEKTIVNÍ ROVINA