VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE:

- POČETNÍ TECHNIKA VYUŽÍVAJÍCÍ VHODNÝCH FUNKCÍ PRO POPIS POSLOUPNOSTÍ
- ÚLOHA A:
  KOLIKA ZPŮSOBY LZE VYBRAT 7 MÍČKŮ Z 5 ČERVENÝCH, 4 ZELENÝCH A 3 ŽLUTÝCH MÍČKŮ?
  - TEDY CHCEME ZNÁT $a_7 := \left|\left\{(i,j,k) : i+j+k=7,\ i \in \{0,1,\dots,5\},\ j \in \{0,1,\dots,4\},\ k \in \{0,1,\dots,3\}\right\}\right|$
  - $\underbrace{a_7}_{\text{ČLEN POSLOUPNOSTI}}$ = KOEFICIENT U x^7 V $\underbrace{(1+x+x^2+x^5)(1+x+\dots+x^4)(1+x+\dots+x^3)}_{\text{VHODNÁ FUNKCE}}$

  $\Rightarrow \underline{\underline{a_7 = 17}}$
- OBECNĚ PRO MNOŽINY $I_1,\dots,I_k$ A FUNKCE $f_j(x) = \sum_{i \in I_j} x^i$, $j = 1,\dots,k$, JE KOEFICIENT U x^m V $f_1(x)\cdot\dots\cdot f_k(x)$ ROVEN POČTU ŘEŠENÍ $i_1 + \dots + i_k = m$ KDE $\forall i_j \in I_j$
  - KOEFICIENTY LZE SNADNO SPOČÍTAT POČÍTAČEM
  - UKÁŽEME SI, JAK JE ZA POMOCI TECHNIK Z MAT. ANALÝZY URČIT RYCHLEJI (A I V OBECNĚJŠÍM NASTAVENÍ)
- VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE POSLOUPNOSTI $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $a_i \in \mathbb{R}$, JE MOCNINNÁ ŘADA

$$a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

- PŘÍKLADY:

(i) $a_i = \begin{cases} 1 & 0 \le i \le m \\ 0 & \text{JINAK} \end{cases}$ (TEDY $(a_i)_{i=0}^{\infty} = (1,\dots,1,0,0,\dots)$)

$$\Rightarrow a(x) = 1 + x + \dots + x^m = \sum_{i=0}^{m} x^i = \underbrace{\underline{\underline{\frac{1-x^{m+1}}{1-x}}}}_{\text{SOUČET GEOMETRICKÉ ŘADY } (x \neq 1)}$$ (KONEČNÝ PŘÍPAD)

(ii) $a_i = 1$ PRO $\forall i = 0,1,\dots$ (TEDY $(a_i)_{i=0}^{\infty} = (1,1,\dots)$)

$$\Rightarrow a(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \underbrace{\underline{\underline{\frac{1}{1-x}}}}_{\text{PRO } x \in (-1,1)}$$ (NEKONEČNÝ PŘÍPAD)

(iii) $a_i = \binom{m}{i}$ PRO $\forall i = 0,1,\dots$ (TEDY $(a_i)_{i=0}^{\infty} = \left(\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots\right)$)

$$\Rightarrow a(x) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \dots + \binom{m}{m}x^m = \underbrace{\underline{\underline{(1+x)^m}}}_{\text{BINOMICKÁ VĚTA}}$$

- Z POSLOUPNOSTÍ TEDY UMÍME VYTVÁŘET FUNKCE

  $(a_0, a_1, \dots) \longrightarrow a(x)$

- NEROSTOU-LI ČLENY MOC RYCHLE, JDE TO I OBRÁCENĚ

  $a(x) \longrightarrow (a_0, a_1, \dots)$

- **VĚTA 2.1:** POKUD PRO $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ $\exists K \in \mathbb{R}$ TAKOVÉ, ŽE $\forall i: |a_i| \leq K^i$, PAK PRO VŠECHNA $x \in \left(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right)$ ŘADA $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ KONVERGUJE ABSOLUTNĚ A NA LIBOVOLNÉM ε-OKOLÍ 0 URČUJE KOEFICIENTY a_i, PROTOŽE $a_i = \frac{a^{(i)}(0)}{i!}$.

  = i-TÁ DERIVACE $a(x)$ V $x = 0$

  - BEZ DŮKAZU (PATŘÍ SPÍŠE DO ANALÝZY)

- TYPICKY: a_n = POČET KOMBINATORICKÝCH OBJEKTŮ „VELIKOSTI" n
  - TĚMTO OBJEKTŮM ODPOVÍDÁ FUNKCE $a(x)$
  - CHCEME URČIT a_n (IDEÁLNĚ NAJÍT FORMULI)

- **METODA:** KOMBINATORICKÝ OBJEKT S NEZNÁMÝM POČTEM a_n

  $\downarrow$

  VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE $a(x)$

  $\downarrow$ OPERACE

  ROZKLAD $a(x)$ NA VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE SE ZNÁMÝMI KOEFICIENTY $\leftarrow$ NAPŘ. (·), (··), (···)

  $\downarrow$ OPERACE

  URČENÍ a_n

- **OPERACE S VYTVOŘUJÍCÍMI FUNKCEMI:**
- MĚJME $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$

OPERACE	POSLOUPNOST	VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE
SOUČET	$(a_i + b_i)_{i=0}^{\infty} = (a_0+b_0, a_1+b_1, \dots)$	$(a+b)(x) = \sum_{i=0} (a_i+b_i) x^i = a(x)+b(x)$
α-NÁSOBEK ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$(\alpha \cdot a_i)_{i=0}^{\infty} = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots)$	$(\alpha a)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha a_i x^i = \alpha \cdot a(x)$
POSUN VPRAVO O m POZIC	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{m}, a_0, a_1, \dots)$	$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+m} = x^m \cdot a(x)$
POSUN VLEVO O m POZIC	$(a_m, a_{m+1}, \dots)$	$\frac{1}{x^m}\left(a(x) - \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i}_{\text{ODEČTENÍ POČÁTEČNÍHO ÚSEKU}}\right)$
DOSAZENÍ αx ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \alpha^3 a_3, \dots)$	$a(\alpha x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha^i x^i$
DOSAZENÍ x^m	$(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, a_2, 0, \dots)$	$a(x^m) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i \cdot m}$
DERIVACE	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$	$a'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot i \cdot x^{i-1}$
INTEGRÁL	$(0, a_0, \frac{1}{2} a_1, \frac{1}{3} a_2, \dots)$	$\int_0^x a(t)\,dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1}$
SOUČIN	$(c_0, c_1, \dots)$, KDE $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$	$a(x) \cdot b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

TZV. **KONVOLUCE**

PŘÍKLAD:

JAKÁ JE VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE PRO $(2,1,4,3,6,5,8,7,\dots)$?

- SOUČET: $(2,1,4,3,6,5,8,7,\dots) = (1,2,3,4,\dots) + (1,-1,1,-1,\dots)$
- DERIVACE: $(1,2,3,4,\dots)$ VZNIKNE DERIVACÍ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE $\frac{1}{1-x}$ PRO $(1,1,1,\dots)$, TEDY $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$
- DOSAZENÍ $-x$: $(1,-1,1,-1,\dots)$ VZNIKNE DOSAZENÍM $-x$ DO VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE PRO POSLOUPNOST $(1,1,1,\dots)$, TEDY $\frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow$ HLEDANÁ FUNKCE JE $\underline{\underline{\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}}}$

– ŘEŠENÍ REKURENTNÍCH ROVNIC VYTVOŘUJÍCÍMI FUNKCEMI: (5)

– UKÁŽEME NA KONKRÉTNÍM PŘÍKLADĚ – FIBONACCIHO ČÍSLA – $F_0 = 0,\ F_1 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

– URČÍME F_n JAKO KOEFICIENTY FUNKCE $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^i$

– MÁME $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ PRO $\forall n \geq 0$

– VYNÁSOBÍME ROVNICI x^n:

$$\Rightarrow F_{n+2} \cdot x^n = F_{n+1} x^n + F_n \cdot x^n$$

– SEČTEME PŘES $n \geq 0$:

$$\underbrace{\sum_{n\geq 0} F_{n+2} x^n}_{= \frac{F(x) - F_0 - F_1 x}{x^2}} = \underbrace{\sum_{n \geq 0} F_{n+1} x^n}_{= \frac{F(x) - F_0}{x}} + \underbrace{\sum_{n\geq 0} F_n x^n}_{= F(x)}$$

OPERACE POSUN VLEVO

$$\frac{F(x) - F_0 - F_1 x}{x^2} = \frac{F(x) - F_0}{x} + F(x)$$

– POUŽITÍM POČÁTEČNÍCH PODMÍNEK $F_0 = 0$ A $F_1 = 1$ URČÍME FUNKCI $F(x)$:

$$\frac{F(x) - x}{x^2} = \frac{F(x)}{x} + F(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = x + xF(x) + x^2 F(x) \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}}}$$

– ZE ZNALOSTI FUNKCE $F(x)$ ZÁKLADNÍMI OPERACEMI URČÍME KOEFICIENTY F_n:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{\left(1 - \frac{1+\sqrt5}{2}x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt5}{2}x\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt5}}{1 - \frac{1+\sqrt5}{2}x} - \frac{\frac{1}{\sqrt5}}{1 - \frac{1-\sqrt5}{2}x}$$

ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY

– OPERACE S VYTVOŘUJÍCÍMI FUNKCEMI (α-NÁSOBEK, DOSAZENÍ αx, SOUČET) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{F_n = \frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]}}$$

$\Rightarrow$ PRÁVĚ JSME DOKÁZALI TZV. BINETŮV VZOREC

– UVEDENÝ POSTUP FUNGUJE NA REKURENCE TYPU

$$a_{n+k} = \alpha_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 a_n,$$

KDE $k \in \mathbb{N}$ A $\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{C}$)

(U FIBONACCIHO POSLOUPNOSTI MÁME $k = 2$, $\alpha_0 = 1 = \alpha_1$)

– TEDY PRO HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ REKURENCE k-TÉHO STUPNĚ S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY