ÚVOD DO RAMSEYOVY TEORIE:

- Z MINULA ZNÁME RAMSEYOVU VĚTU PRO GRAFY A DVĚ BARVY
  BARVÍME DVOJICE VRCHOLŮ
- NYNÍ SI ROZŠÍŘÍME NA VÍCE BAREV A TAKÉ NA BARVENÍ p-TIC VRCHOLŮ
- PRO ČÍSLA p, n, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ DEFINUJEME RAMSEYOVO ČÍSLO
  VELIKOST BAREVNÝCH MNOŽIN
  POČET BAREV
  VELIKOSTI 1-BAREVNÝCH PODSTRUKTUR, KTERÉ CHCEME NAJÍT

$R_p(m_1, \dots, m_n)$ JAKO NEJMENŠÍ $N \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE PRO KAŽDOU MNOŽINU X S $|X| \geq N$ A KAŽDÉ n-OBARVENÍ MNOŽINY $\binom{X}{p}$ EXISTUJE $i \in \{1, \dots, n\}$ A $Y \subseteq X$ TAKOVÉ, ŽE $|Y_i| = m_i$ A VŠECHNY p-TICE Z $\binom{Y}{p}$ MAJÍ i-TOU BARVU

- VĚTA 11.1 (RAMSEYOVA VĚTA PRO p-TICE, 1930):
  PRO KAŽDÉ $p, n, m_1, \dots, m_n$ JE $R_p(m_1, \dots, m_n)$ KONEČNÉ.

DK:
- ZOBECNÍME MYŠLENKU DŮKAZU RAMSEYOVY VĚTY PRO GRAFY A 2 BARVY
- MĚJME X, $|X| \geq N$ PRO VELKÉ N A n-OBARVENÍ χ MNOŽINY $\binom{X}{p}$
- POUŽIJEME INDUKCI PODLE p A $m_1 + \dots + m_n$
  URČÍME POZDĚJI
- ZAČÁTEK INDUKCE:
  - PRO $p = 1$ SE JEDNÁ O DIRICHLETŮV PRINCIP (VĚTA 10.2)
  - POKUD JE NĚJAKÉ $m_i = 1$, PAK $R_p(m_1, \dots, m_n) = 1$
    STAČÍ JEDEN VRCHOL
- INDUKČNÍ KROK:
  - NECHŤ JSOU $p \geq 2$ A $m_1, \dots, m_n \geq 2$
  - PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE VĚTA PLATÍ PRO $p-1$ A KAŽDÉ $m_1, \dots, m_n$ A PRO p A KAŽDÉ $m_1', \dots, m_n'$, KDE $m_1' + \dots + m_n' < m_1 + \dots + m_n$
  - ZVOLME $v \in X$ A OBARVĚME KAŽDÉ $P \in \binom{X \setminus \{v\}}{p-1}$ BARVOU $\chi(P \cup \{v\})$, DEFINUJME $\tilde{m}_i = R_p(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_n)$
  - JE-LI $N \geq 1 + R_{p-1}(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n)$, PAK Z IP PRO $p-1, \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n$ APLIKOVANÉHO NA $\binom{X \setminus \{v\}}{p-1}$ MÁME $j \in \{1, \dots, n\}$ A $X' \subseteq X \setminus \{v\}$ TAKOVÉ, ŽE $|X'| = \tilde{m}_j$ A VŠECHNY p-TICE $P \cup \{v\}$ S $P \in \binom{X'}{p-1}$ MAJÍ j-TOU BARVU V χ

(2)

- UVAŽME $\binom{X'}{p}$, KTERÉ JE OBARVENÉ n-OBARVENÍM χ

- Z VOLBY m_j MÁME PODLE IP PRO $p, m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_n$ $i \in \{1, \dots, n\}$ A $Y \subseteq X'$ TAKOVÉ, ŽE VŠECHNY p-TICE V $\binom{Y}{p}$ MAJÍ i-TOU BARVU A $|Y| = m_i$, POKUD $i \neq j$, A $|Y| = m_i - 1$, POKUD $i = j$

  ↳ PAK JSME HOTOVI

- POKUD $i = j$, PAK MNOŽINA $Y \cup \{v\}$ MÁ VŠECHNY p-TICE i-TÉ BARVY A $|Y \cup \{v\}| = m_i$

  ↳ OPĚT JSME HOTOVI

☒

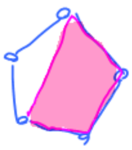
- STAČÍ TEDY ZVOLIT $N \geq 1 + R_{p-1}(m_1, \dots, m_n)$

- APLIKACE – ERDŐSOVA – SZEKERESOVA VĚTA:
  - JEDNA Z PRVNÍCH APLIKACÍ RAMSEYOVY VĚTY
  - P = KONEČNÁ MNOŽINA BODŮ V ROVINĚ $\mathbb{R}^2$
    - P JE V OBECNÉ POLOZE, POKUD NEOBSAHUJE 3 BODY NA PŘÍMCE
    - P JE V KONVEXNÍ POLOZE, POKUD TVOŘÍ MNOŽINU VRCHOLŮ KONVEXNÍHO MNOHOÚHELNÍKU

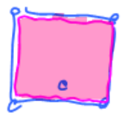
- LEMMA 11.2: KAŽDÁ MNOŽINA 5 BODŮ V $\mathbb{R}^2$ V OBECNÉ POLOZE OBSAHUJE 4 BODY V KONVEXNÍ POLOZE

- DK: - 3 (KOMBINATORICKY ODLIŠNÉ) PŘÍPADY:

  a) 5 BODŮ NA HRANICI :



  b) 4 BODY NA HRANICI :



  c) 3 BODY NA HRANICI :

PŘÍMKA SKRZ DVA BODY UVNITŘ MÁ 2 BODY Z HRANICE NA TÉŽE STRANĚ A TYTO BODY SPOLU S OBĚMA VNITŘNÍMI JSOU V KONVEXNÍ POLOZE

☒

- **VĚTA 11.3** (**ERDŐSOVA-SZEKERESOVA VĚTA**, 1935): PRO KAŽDÉ $k \in \mathbb{N}$ EXISTUJE NEJMENŠÍ $ES(k) \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE KAŽDÁ KONEČNÁ MNOŽINA S $\geq ES(k)$ BODŮ V $\mathbb{R}^2$ V OBECNÉ POLOZE OBSAHUJE k BODŮ V KONVEXNÍ POLOZE.

$|P| \geq ES(6)$

6 BODŮ V KONVEXNÍ POLOZE

- DŮK:
  - UKÁŽEME, ŽE $ES(k) \leq R_4(k,5)$
  - MĚJME KONEČNOU MNOŽINU BODŮ P V $\mathbb{R}^2$ V OBECNÉ POLOZE S $|P| \geq R_4(k,5)$
  - OBARVĚME KAŽDOU ČTVEŘICI C BODŮ Z P ČERVENĚ, JE-LI V OBECNÉ POLOZE A MODŘE JINAK
    - TEDY $\chi(C) = \begin{cases} \color{red}\bullet & C = \square \\ \color{blue}\bullet & C = \triangle \end{cases}$
  - VĚTA 11.1 $\Rightarrow \exists$ a) BUĎ $Q \subseteq P$ S $|Q| = k$ A SE VŠEMI ČTVEŘICEMI ČERVENÝMI V χ
    b) NEBO PĚTICE BODŮ SE VŠEMI ČTVEŘICEMI MODRÝMI V χ
  - b) NENASTANE PODLE LEMMA 11.2, V PŘÍPADĚ a) JE Q V KONVEXNÍ POLOZE A JSME HOTOVI $\boxtimes$

- TARSY UKÁZAL $ES(k) \leq R_3(k,k)$, DÁ SE RELATIVNĚ SNADNO UKÁZAT
  $ES(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1$

- **ERDŐSOVA-SZEKERESOVA DOMNĚNKA** (1935, 500\$):

$$\forall k \geq 2 : ES(k) = 2^{k-2} + 1$$

- PLATÍ PRO $k \leq 6$, NEJLEPŠÍ ZNÁMÝ ODHAD: $ES(k) \leq 2^{k+o(k)}$ (SUK, 2016)

- ZNÁMO: $ES(k) \geq 2^{k-2} + 1$ PRO KAŽDÉ $k \geq 2$

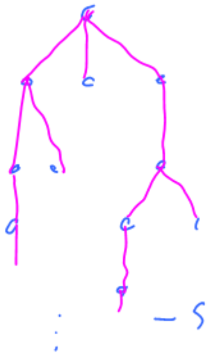
– RAMSEYOVA VĚTA PRO NEKONEČNOU VERZI

– **VĚTA 11.4 (NEKONEČNÁ VERZE RAMSEYOVY VĚTY)**:
PRO KAŽDÉ $p, n \in \mathbb{N}$ A PRO KAŽDÉ n-OBARVENÍ MNOŽINY $\binom{\mathbb{N}}{p}$ EXISTUJE NEKONEČNÁ $A \subseteq \mathbb{N}$ TAKOVÁ, ŽE VŠECHNY JEJÍ p-TICE MAJÍ V DANÉM n-OBARVENÍ STEJNOU BARVU.

– DK:
- POSTUPUJEME INDUKCÍ PODLE p
- ZAČÁTEK INDUKCE:
  - PRO $p=1$ JE TVRZENÍ TRIVIÁLNÍ
- INDUKČNÍ KROK:
  - MĚJME n-OBARVENÍ $\chi: \binom{\mathbb{N}}{p} \to \{1, \dots, n\}$ BÚNO TOTO JSOU NAŠE BARVY
  - PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE VĚTA PLATÍ PRO $p-1$
  - SESTROJÍME POSLOUPNOST $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \subseteq \mathbb{N}$ NEKONEČNÝCH MNOŽIN
  - POLOŽME $A_1 = \mathbb{N}$ A PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE MÁME $A_1, \dots, A_i$, $i \geq 1$
  - ZVOLME NEJMENŠÍ PRVEK v_i Z A_i
  - ZVOLME n-OBARVENÍ χ_i, KTERÉ KAŽDÉ $(p-1)$-TICI $Q \in \binom{A_i \setminus \{v_i\}}{p-1}$ PŘIŘADÍ BARVU $\chi_i(Q) = \chi(Q \cup \{v_i\})$
  - POTOM Z IP PRO $p-1$ NA $A_i \setminus \{v_i\}$ EXISTUJE $A_{i+1} \subseteq A_i \setminus \{v_i\}$ TAKOVÉ, ŽE VŠECHNY $(p-1)$-TICE Z $\binom{A_{i+1}}{p-1}$ MAJÍ V χ_i STEJNOU BARVU $b_i \in \{1, \dots, n\}$ A A_{i+1} JE NEKONEČNÁ
  - PAK MÁME POSLOUPNOST $v_1, v_2, \dots$ TAKOVOU, ŽE KAŽDÁ p-TICE $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_p}\}$ S $v_{i_1} < \dots < v_{i_p}$ MÁ V χ BARVU b_{i_1} (TEDY BARVA ZÁVISÍ JEN NA NEJMENŠÍM PRVKU)
  - BUĎ $b \in \{b_1, b_2, \dots\}$ BARVA, KTERÁ SE VYSKYTNE NEKONEČNĚ KRÁT A ZVOLME $A = \{v_i : b = b_i\}$
  - POTOM KAŽDÁ p-TICE Z $\binom{A}{p}$ MÁ V χ BARVU b $\boxtimes$

– NEKONEČNÁ VERZE RAMSEYOVY VĚTY IMPLIKUJE KONEČNOU

- DÁ SE UKÁZAT SPOREM, MY SI JI DOKÁŽEME POMOCÍ NÁSLEDUJÍCÍHO VÝSLEDKU
- PRO JEDNODUCHOST JE OMEZÍME NA PŘÍPAD $m_1 = \dots = m_r = m$
- LEMMA 11.5 (KÖNIGOVO LEMMA): V KAŽDÉM ZAKOŘENĚNÉM STROMĚ, KTERÝ MÁ NEKONEČNĚ MNOHO VRCHOLŮ ALE JEN KONEČNÉ STUPNĚ EXISTUJE NEKONEČNÁ CESTA ZAČÍNAJÍCÍ V KOŘENI
  - BEZ DŮKAZU (CVIČENÍ)



- SPOREM – NECHŤ $\exists m$ T.Ž. PRO $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists$ r-OBARVENÍ $\chi_N : \binom{\{1,\dots,N\}}{r} \to \{1,\dots,r\}$ TAKOVÉ, ŽE ŽÁDNÁ MNOŽINA $A \in \binom{\{1,\dots,N\}}{m}$ NENÍ 1-BAREVNÉ $\binom{A}{r}$ V χ_N
- ZKONSTRUUJEME STROM T, KDE N-TÁ ÚROVEŇ JE TVOŘENA OBARVENÍMI χ_N A KDE KOŘEN V NULTÉ ÚROVNI ODPOVÍDÁ $\emptyset$
  - χ_{N+1} JE SYNEM χ_N, POKUD ROZŠIŘUJE χ_N
    - TEDY $\chi_{N+1} \restriction \binom{\{1,\dots,N\}}{r} = \chi_N$

  $\Rightarrow$ STROM T MÁ KONEČNÉ STUPNĚ
- LEMMA 11.5 $\Rightarrow$ $\exists$ NEKONEČNÁ VĚTEV V T $\Rightarrow$ r-OBARVENÍ $\chi : \binom{\mathbb{N}}{r} \to \{1,\dots,r\}$ BEZ NEKONEČNÉ $A \subseteq \mathbb{N}$ S JEDNOBAREVNOU $\binom{A}{r}$ $\Rightarrow$ SPOR S VĚTOU 11.4 $\boxtimes$