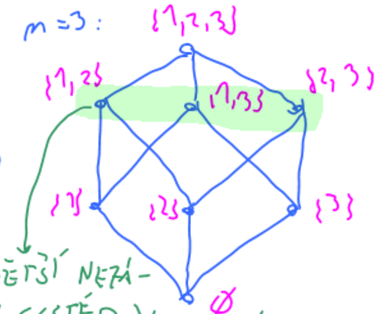
POČÍTÁNÍ DVĚMA ZPŮSOBY (SPERNEROVA VĚTA):

- UKÁŽEME SI JEŠTĚ JEDNU APLIKACI POČÍTÁNÍ DVĚMA ZPŮSOBY
- SYSTÉM $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,m\}}$ PODMNOŽIN $\mathcal{M}$-PRVKOVÉ MNOŽINY $\{1,\dots,m\}$ JE **NEZÁVISLÝ**, POKUD PLATÍ: $\forall A, B \in \mathcal{M}$, $A \neq B$: $A \not\subseteq B$ & $B \not\subseteq A$

- **VĚTA 10.1 (SPERNEROVA VĚTA)**: KAŽDÝ NEZÁVISLÝ SYSTÉM V $2^{\{1,\dots,m\}}$ OBSAHUJE $\leq \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ MNOŽIN A TENTO ODHAD JE TĚSNÝ.

  - EKVIVALENTNĚ:
    NEJDELŠÍ ANTIŘETĚZEC V POSETU $(2^{\{1,\dots,m\}}, \subseteq)$ MÁ PRÁVĚ $\binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ PRVKŮ



NEJVĚTŠÍ NEZÁVISLÝ SYSTÉM V $2^{\{1,2,3\}}$ MÁ VELIKOST $\binom{3}{\lceil \frac{3}{2} \rceil} = 3$

- DK:
  - **1)** EXISTUJE NEZÁVISLÝ SYSTÉM $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,m\}}$ VELIKOSTI $\binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$
    - STAČÍ VZÍT $\mathcal{M} = \{A \subseteq \{1,\dots,m\} : |A| = \lceil \frac{m}{2} \rceil\}$
    - POTOM $\mathcal{M}$ JE JISTĚ NEZÁVISLÝ
  - **2)** UKÁŽEME, ŽE KAŽDÝ NEZÁVISLÝ SYSTÉM $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,m\}}$ SPLŇUJE $|\mathcal{M}| \leq \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ CO DO VELIKOSTI

- DVĚMA ZPŮSOBY SPOČÍTÁME POČET $\boxed{Z} = |\{(M, \breve{R}) : M \in \mathcal{M},\ \breve{R} = \text{MAXIMÁLNÍ ŘETĚZEC OBSAHUJÍCÍ } M\}|$

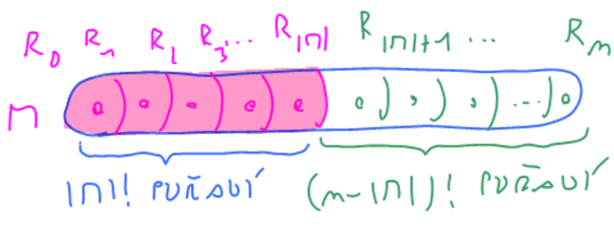
- **MAXIMÁLNÍ ŘETĚZEC** $\breve{R}$ VYPADÁ NÁSLEDOVNĚ:
  $\breve{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_m\}$, KDE:
  $\emptyset = R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_m = \{1,\dots,m\}$, $|R_{i+1} \setminus R_i| = 1$

- **1. ZPŮSOB** ODHADNUTÍ Z:
  - KAŽDÝ MAX. ŘETĚZEC OBSAHUJE ≤ 1 MNOŽINU Z $\mathcal{M}$, PROTOŽE $\mathcal{M}$ JE NEZÁVISLÝ $\to |\breve{R} \cap \mathcal{M}| \leq 1$ PRO KAŽDÝ MAX. ŘETĚZEC $\mathcal{M}$

  $\Rightarrow Z \leq m! \cdot 1 = m!$

  POČET MAXIMÁLNÍCH ŘETĚZCŮ JE $m!$, PROTOŽE STAČÍ VYBRAT POŘADÍ PRVKŮ Z $\{1,\dots,m\}$, VE KTERÉM ROZŠIŘUJEME MNOŽINY $R_0, R_1, \dots, R_m$

- **2. ZPŮSOB** ODHADNUTÍ Z:
  - KAŽDOU MNOŽINU $M \in \mathcal{M}$ LZE DOPLNIT $|M|!\,(m-|M|)!$ ZPŮSOBY NA MAX. ŘETĚZEC $\breve{R} = \{R_0, \dots, R_m\} \ni M$



$$\Rightarrow Z = \sum_{M \in \mathcal{M}} |M|!\,(m-|M|)!$$

- DŮKAZ NAVÍC: (2)

$$\sum_{n \in \mathcal{M}} |n|!\,(m-|n|)! = Z \leq m!$$

$\binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$ JE NEJVĚTŠÍ BINOMICKÝ KOEFICIENT Z $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots, \binom{m}{m}$, PODLE POZOROVÁNÍ 1.4

$$\Rightarrow 1 \geq \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{|n|!\,(m-|n|)!}{m!} = \sum_{n \in \mathcal{M}} \binom{m}{|n|}^{-1} \geq \sum_{n \in \mathcal{M}} \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{-1} = \frac{|\mathcal{M}|}{\binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{|\mathcal{M}| \leq \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}}}$$

$\boxtimes$

- POZNÁMKA: PODLE VĚTY O DLOUHÉM A ŠIROKÉM MÁME DOLNÍ ODHAD $\geq \frac{|2^{\{1,\dots,m\}}|}{\omega(2^{\{1,\dots,m\}}, \subseteq)} =$

$\omega(2^{\{1,\dots,m\}}, \subseteq)$ … VELIKOST MAXIMÁLNÍHO ŘETĚZCE V $(2^{\{1,\dots,m\}}, \subseteq)$

$$= \frac{2^m}{m+1} \ll \frac{2^m}{\Theta(\sqrt{m})} = \binom{m}{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$$

PODLE VĚTY 1.5

RAMSEYOVA TEORIE: 3

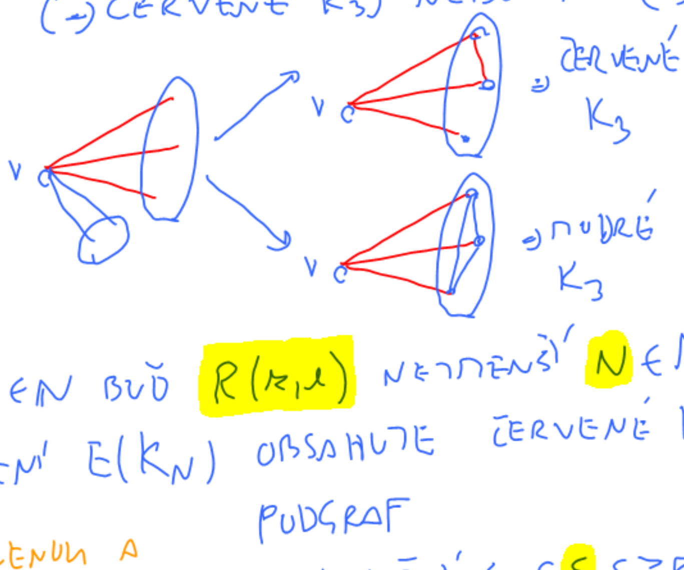
- „KAŽDÝ VELKÝ SYSTÉM OBSAHUJE HOMOGENNÍ PODSYSTÉM" DANÉ VELIKOSTI
- OBARVENÍ MNOŽINY X n BARVAMI (ZKRÁCENĚ n-OBARVENÍ) JE LIBOVOLNÉ ZOBRAZENÍ PŘIŘAZUJÍCÍ KAŽDÉMU PRVKU Z X JEDNU Z n BAREV
- NÁSLEDUJÍCÍ VĚTA JE NEJZÁKLADNĚJŠÍM VÝSLEDKEM TOHOTO TYPU
- **VĚTA 10.2 (DIRICHLETŮV PRINCIP):** → V ANGLIČTINĚ „PIGEONHOLE PRINCIPLE"

  $\forall n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$: OBARVÍME-LI PRVKY MNOŽINY X n BARVAMI, PAK, JE-LI $|X| \geq D(m_1, \dots, m_n; n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (m_i - 1)$, X OBSAHUJE m_i PRVKŮ i-TÉ BARVY.

- DŮKAZ JE TRIVIÁLNÍ
- $D(m_1, \dots, m_n; n)$ JE NEJMENŠÍ VELIKOST MNOŽINY X, PRO KTEROU DIRICHLETŮV PRINCIP PLATÍ:

$\Rightarrow \nexists\, m_i$ PRVKŮ Z X i-TÉ BARVY

- CO KDYŽ OBARVUJEME DVOJICE PRVKŮ Z X?
- PŘÍKLAD:
  - NA KAŽDÉ PÁRTY ≥ 6 LIDÍ EXISTUJÍ 3, CO SE NAVZÁJEM ZNAJÍ, NEBO 3, CO SE NAVZÁJEM NEZNAJÍ (NEBOLI V KAŽDÉM 2-OBARVENÍ $E(K_m)$, $m \geq 6$, EXISTUJE TROJÚHELNÍK S HRANAMI TÉŽE BARVY)
    - MĚJME 2-OBARVENÍ $E(K_m)$ ČERVENOU A MODROU BARVOU
    - VRCHOL $v \in V(K_m)$ MÁ $m-1$ SOUSEDŮ, Z NICHŽ, PODLE VĚTY 10.2, ASPOŇ $\lceil \frac{m-1}{2} \rceil \geq 3$ JE SPOJENO S v ČERVENOU HRANOU ↳ BÚNO
    - TITO 3 SOUSEDÉ MEZI SEBOU BUĎ MAJÍ ČERVENOU HRANU ($\Rightarrow$ ČERVENÉ K_3) NEBO NE ($\Rightarrow$ MODRÉ K_3)



- PRO K_5 NEPLATÍ:

- PRO $k, l \in \mathbb{N}$ BUĎ $R(k,l)$ NEJMENŠÍ $N \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE KAŽDÉ 2-OBARVENÍ $E(K_N)$ OBSAHUJE ČERVENÉ K_k ČI MODRÉ K_l JAKO PODGRAF

  ↓ BÚNO ČERVENOU A MODROU BARVOU

  - TEDY KAŽDÝ GRAF G S $\geq R(k,l)$ VRCHOLY OBSAHUJE K_k ČI JEHO DOPLNĚK $\overline{G}$ OBSAHUJE K_l JAKO PODGRAF

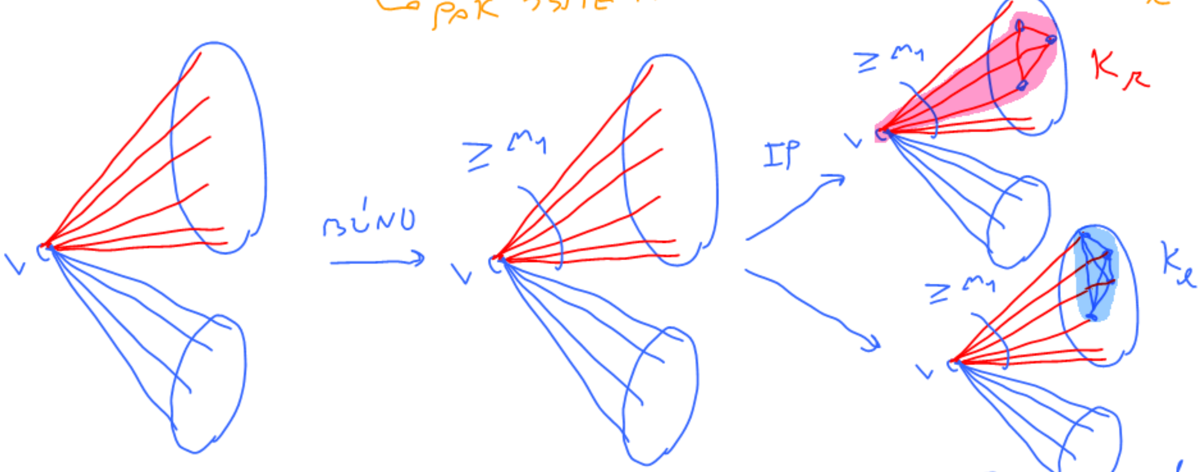
VĚTA 10.3 (RAMSEYOVA VĚTA PRO 2 BARVY):

$\forall k, l \in \mathbb{N}$: $R(k,l)$ je konečné. Dokonce $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1} = \binom{k+l-2}{l-1}$

– Ramseyovu větu (v obecnějším znění) dokázal Ramsey (1928), uvedený odhad dokázali Erdős a Szekeres (1935), kteří ji objevili nezávisle

– Dk:

- indukcí podle $k+l$
- začátek indukce:
  - je-li $k=1$ nebo $l=1$, pak $R(k,l)=1$
    - ↳ chceme 1-barevné K_1, což je libovolný vrchol
- indukční krok:
  - nechť $k \geq 2$ a $l \geq 2$
  - podle IP $R(k-1,l) \leq \binom{k+l-3}{k-2}$ a $R(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-1}$
  - ukážeme, že $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$
  - mějme $N \geq R(k-1,l) + R(k,l-1)$ vrcholů a zvolme $v \in V(K_N)$
  - protože $N \geq \underset{\text{za vrchol } v}{1} + 1 + \big(\underbrace{(R(k-1,l)-1)}_{m_1-1} + \underbrace{(R(k,l-1)-1)}_{m_2-1}\big)$, pak podle věty 10.2 existuje buď $\geq m_1$ vrcholů spojených s v červenou hranou nebo $\geq m_2$ vrcholů spojených s v modrou hranou
  - BÚNO v má $\geq m_1 = R(k-1,l)$ červených sousedů
    $\Rightarrow$ červení sousedé mezi sebou obsahují buď červené K_{k-1} nebo modré K_l
    - K_{k-1}: to spolu s v tvoří červené K_k $\Rightarrow$ jsme hotovi
    - K_l: ↳ pak jsme hotovi



$$\Rightarrow R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) \overset{IP}{\leq} \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$$

$\boxtimes$

- Určit Ramseyovská čísla $R(k,l)$ přesně je velice obtížné (už pro malé případy) $R(3,3)=6$, $R(4,4)=18$
- není známý žádný vzorec
- známá netriviální Ramseyovská čísla $R(k,k)$: $43 \leq R(5,5) \leq 48$, $102 \leq R(6,6) \leq 165$

- Jak přesný je odhad $R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq 4^k$?
  - dlouhou dobu nebyl známý lepší než polynomiální odhad
  - Erdős (1947) ukázal, že $R(k,k)$ roste exponenciálně pomocí pravděpodobnostního argumentu

- **Věta 10.4**:

$$\forall k \geq 3: R(k,k) > 2^{k/2}.$$

Dk:

- mějme $N < 2^{k/2}$
- uvažme náhodné 2-obarvení χ hran z $E(K_N)$:

$$\forall e \in E(K_N): \chi(e) = \begin{cases} \text{červená} & \text{s pravděpodobností } \frac{1}{2} \\ \text{modrá} & \text{s pravděpodobností } \frac{1}{2} \end{cases}$$

(náhodně, nezávisle)

- pro $\forall K \in \binom{V(K_N)}{k}$ označme jev A_K = „K indukuje 1-barevné K_k v χ"

$\Rightarrow \Pr(A_K) = 2^{1-\binom{k}{2}}$

↳ $\Pr(\text{všechny hrany jsou červené}) = 2^{-\binom{k}{2}}$ a totéž pro modrou

- $p = \Pr(\text{v } \chi\ \exists \text{ 1-barevné } K_k)$
- chceme ukázat, že $p < 1$, pak totiž $\exists\, \chi$ bez 1-barevného K_k a máme $R(k,k) > N$

↳ průnik jevů určujících p není jistý

- platí

$$p \leq \sum_{K \in \binom{V(K_N)}{k}} \Pr(A_K) = \sum_{K \in \binom{V(K_N)}{k}} 2^{1-\binom{k}{2}} = \binom{N}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{N^k}{2^{k/2+1}} \cdot 2^{-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}-1} = N^k \cdot 2^{-k^2/2} < 1$$

„union bound"

odhad $\binom{N}{k} \leq \frac{N^k}{2^{k/2+1}}$, plyne z odhadu $\binom{N}{k} \leq \frac{N^k}{k!}$ z 1. přednášky (pro $k \geq 3$)

↳ pro $N < 2^{k/2}$ ⊠

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sqrt{2}^k \leq R(k,k) \leq 4^k}}$$

- odhady se příliš vylepšit nelze

nejlepší dolní odhad: $R(k,k) \geq (1-o(1)) \frac{\sqrt{2}\,k}{e} 2^{k/2}$

- otevřený problém (100 \$): $\exists \lim_{k\to\infty} R(k,k)^{1/k}$?

↳ pokud ano, pak $\in [\sqrt{2}, 4]$