ODHADY FAKTORIÁLU:

- FAKTORIÁL $= n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 =$ POČET BIJEKCÍ $\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ 1
- DEFINICE ŘÍKÁ VŠE, ALE ŠPATNĚ SE S NÍ POČÍTÁ
  ↳ JAK RYCHLE ROSTE $\frac{n^n}{n!}$?
- UKÁŽEME SI TŘI ODHADY
- TVRZENÍ 1.1:

$$\forall n \in \mathbb{N}:\quad n^{n/2} \le n! \le n^n$$

DK:

i) HORNÍ ODHAD:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \overbrace{i}^{\le n} \le \prod_{i=1}^{n} n = \underline{\underline{n^n}}$$

ii) DOLNÍ ODHAD:

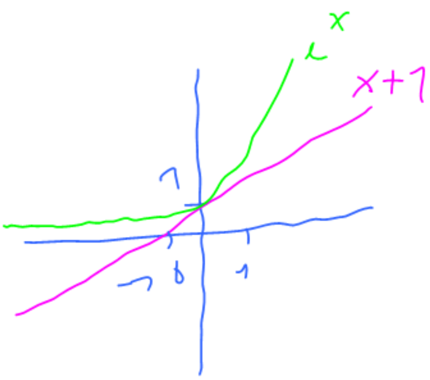
- POUŽIJEME NEROVNOST, KTERÁ ŘÍKÁ, ŽE PRO KAŽDÉ $i = 1,\dots,n$ PLATÍ $i(n+1-i) \ge n$
  - PLATÍ PRO $i=1$ A $i=n$
  - PRO $2 \le i \le \lceil \frac{n}{2} \rceil$ MÁME $i(n+1-i) \ge 2\cdot\frac{n}{2} = n$
  - PRO $\lceil \frac{n}{2} \rceil \le i < n$ MÁME $i(n+1-i) \ge \frac{n}{2}\cdot 2 = n$
  - $\Rightarrow$ PLATÍ PRO KAŽDÉ $i = 1,\dots,n$

$$\Rightarrow (n!)^2 = n!\cdot n! = \underbrace{n\cdot 1}_{\ge n}\cdot\underbrace{(n-1)\cdot 2}_{\ge n}\cdots\underbrace{2\,(n-1)}_{\ge n}\cdot\underbrace{1\cdot n}_{\ge n} \ge$$

$$\ge n^n \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{n! \ge n^{n/2}}}$$ $\boxtimes$

- NYNÍ SI UKÁŽEME SILNĚJŠÍ ODHAD
- VĚTA 1.2:
  PRO $\forall n \in \mathbb{N}$: $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\cdot n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$

- LEMMA 1.3:
  - PRO $\forall x \in \mathbb{R}$: $1 + x \le e^x$ $\quad(e = 2{,}71828\dots)$
  - DŮLEŽITÝ ODHAD!



DK:

- $f(x) := e^x - (x+1)$ — CHCEME UKÁZAT, ŽE $f(x) \ge 0$ PRO $\forall x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow (f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
  ↳ 0 JE STACIONÁRNÍ BOD
- $f''(x) = e^x$
- $f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ V BUDĚ $x = 0$ JE GLOBÁLNÍ MINIMUM PRO f $\Rightarrow f(x) \ge 0$ PRO $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxtimes$

- DVA DŮKAZY VĚTY 1.2

- 1. DŮKAZ (INDUKCÍ):

a) HORNÍ ODHAD:

- PRO $n=1$ PLATÍ $\left(1 = 1! \le e\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1\right)$
- NECHŤ $n \ge 2$
- $n! = n\cdot \underbrace{(n-1)!}_{IP} \le n\cdot \underbrace{e\cdot (n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}_{} =$

$$= e\cdot n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \underbrace{e\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}_{\text{CHCEME } \le 1}$$

- $e\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \le e\cdot\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n = \underline{\underline{1}}$

LEMMA PRO $x := -1/n$

b) DOLNÍ ODHAD:

- PRO $n=1$ PLATÍ $\left(1 = e\left(\frac{1}{e}\right)^1 \le 1! = 1\right)$
- NECHŤ $n \ge 2$
- $n! = n\underbrace{(n-1)!}_{IP} \ge n\cdot e\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \underbrace{e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}_{\text{CHCEME } \ge 1}$
- $e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \ge 1 \iff \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \le 1$

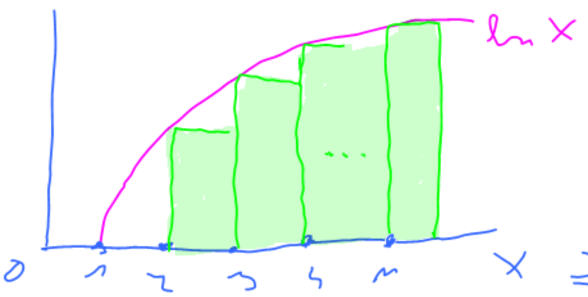
$$\frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \le \frac{1}{e}\left(e^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} = \underline{\underline{1}}$$

LEMMA S $x := 1/(n-1)$

$\boxtimes$

- 2. DŮKAZ (INTEGRÁLEM):

- POUZE HORNÍ ODHAD (DOLNÍ ODHAD ANALOGICKY)
- $n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 \Rightarrow \ln(n!) = \underbrace{\ln(n)+\ln(n-1)+\dots+\ln(2)+\ln(1)}_{\text{PLOCHA ZELENÝCH OBDÉLNÍKŮ}} \le$



$$\le \underbrace{\int_1^{n+1}}_{\text{PLOCHA POD } \ln x} \ln x\, dx = (n+1)\ln(n+1) - n$$

$$\Rightarrow n! = n(n-1)! = n\cdot e^{\ln((n-1)!)} \le n\cdot \underbrace{e^{n\ln n}}_{=n^n} {}^{-(n-1)} = n e\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$\boxtimes$

- NEJSILNĚJŠÍ ZNÁMÝ ODHAD FAKTORIÁLU

- **VĚTA 1.4 (STIRLINGOVA FORMULE):**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

↳ ZNAČÍ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$

- BEZ DŮKAZU

- DOKÁZAL DE MOIVRE, STIRLING URČIL KONSTANTU

- **ODHADY KOMBINAČNÍCH ČÍSEL:**

- $n, k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ = POČET VÝBĚRŮ NEUSPOŘÁDANÝCH k-TIC Z n-TIC

- **POZOROVÁNÍ 1.5:**

(i) $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $n \ge k$: $\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le n^k$ (HODÍ SE PRO $n \gg k$)

(ii) NEJVĚTŠÍ KOMBINAČNÍ ČÍSLO PRO DANÉ n JE $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ A PLATÍ $\dfrac{2^n}{n+1} \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \le 2^n$

DK: (i) $\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \dfrac{n-i}{k-i}$ A $\dfrac{n-i}{k-i} \le n \Rightarrow \binom{n}{k} \le n^k$

$\dfrac{n-i}{k-i} \ge \dfrac{n}{k}$ PRO $n \ge k$ A $i \in \{0, \dots, k-1\}$

$\Rightarrow \binom{n}{k} \ge \left(\frac{n}{k}\right)^k$

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \dfrac{n+1-k}{k}$ $\begin{cases} > 1 & \text{PRO } k < \frac{n+1}{2} \\ < 1 & \text{PRO } k > \frac{n+1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ PRO $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil$ FUNKCE $\binom{n}{k}$ NABÝVÁ MAXIMA

- BINOMICKÁ VĚTA $\Rightarrow \dfrac{2^n}{n+1} \le \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \le 2^n$

$\boxtimes$

4

- VĚTA 1.6:
  - PRO KAŽDÉ $m \in \mathbb{N}$ PLATÍ $\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$

- DŮKAZ VĚTY 1.5:
  - DEFINUJME $P := \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}$
  - POTOM $P \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$ A TEDY $P = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}$

  $\Rightarrow$ CHCEME $\frac{1}{2\sqrt{m}} \overset{(i)}{\leq} P \overset{(ii)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2m}}$

  (i) UVAŽME $1 > \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m)^2}\right) =$

  $= \left(\frac{1 \cdot 3}{2^2}\right)\left(\frac{3 \cdot 5}{4^2}\right)\cdots\left(\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}\right) = (2m+1)P^2$

  $\Rightarrow P < \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \leq \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2m}}}}$

  (ii) UVAŽME $1 > \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m-1)^2}\right) =$

  $= \left(\frac{2 \cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4 \cdot 6}{5^2}\right)\cdots\left(\frac{(2m-2)(2m)}{(2m-1)^2}\right) = \frac{1}{2 \cdot 2m \cdot P^2}$

  $\Rightarrow P > \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{m}}}}$

$\boxtimes$

- STIRLINGOVA FORMULE $\Rightarrow \binom{2m}{m} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$

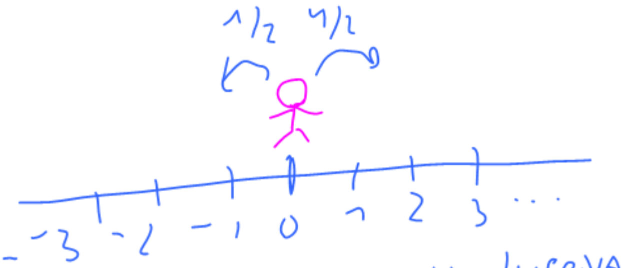
- $\forall m, k \in \mathbb{N}$ S $m \geq k$ PLATÍ $\binom{m}{k} \leq \left(\frac{e\,m}{k}\right)^k$
  - BEZ DŮKAZU

- APLIKACE:

1) ODHAD $\binom{2n}{n}$ JE ZÁKLADEM JEDNOHO Z NEJJEDNODUŠŠÍCH DŮKAZŮ BERTRANDOVA POSTULÁTU ($\forall n \ \exists$ PRVOČÍSLO p S $n < p \le 2n$)

2) NÁHODNÉ PROCHÁZKY:

- STOJÍME V 0 NA OSE $\mathbb{Z}$



- V $\forall$ KROKU NÁHODNĚ NEZÁVISLE UDĚLÁME KROK DOLEVA/DOPRAVA S PRAVDĚPODOBNOSTÍ 1/2
- n KROKŮ CELKEM, $n \to \infty$
- KOLIKRÁT SE VRÁTÍME DO 0?
  - NÁHODNÁ VELIČINA $X = I_{A_2} + I_{A_4} + \dots$, KDE $I_{A_{2m}}$ JE INDIKÁTOROVÁ VELIČINA JEVU A_{2m} = „PO $2m$ KROCÍCH JSME V 0"

- $$P(A_{2m}) = \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}} \overset{\text{VĚTA 1.6}}{\ge} \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

$\binom{2m}{m}$ – VÝBĚR m KROKŮ DOLEVA, ZBYLÝCH m KROKŮ DOPRAVA S $2m$ KROKY

2^{2m} – CELKOVÝ POČET PROCHÁZEK

$X = \sum_{m \ge 1} I_{A_{2m}}$

- $$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{\infty} I_{A_{2m}}\right] \overset{\text{LINEARITA } \mathbb{E}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}[I_{A_{2m}}] = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_{2m}) \ge \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{m}} \longrightarrow \infty$$

$\mathbb{E}[I_{A_{2m}}] = P(A_{2m})$ Z DEFINICE INDIKÁTOROVÉ VELIČINY

$\Rightarrow$ STŘEDNÍ HODNOTA POČTU NÁVRATŮ ROSTE DO NEKONEČNA

- V $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ TAKÉ $\mathbb{E}[X] \longrightarrow \infty$

V $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ UŽ NE!

$$p(d) := P[\text{VRÁTÍME SE DO POČÁTKU V } \mathbb{Z}^d] \begin{cases} = 1 & d \in \{1,2\} \\ < 1 & d \ge 3 \end{cases}$$

(PÓLYOVA VĚTA)

($p(3) \approx 0{,}34$)