Kombinatorika a grafy I

Martin Balko

9. přednáška

30. listopadu 2021

Míra souvislosti grafů

Připomenutí z minula I

Připomenutí z minula I

- Hranový řez v grafu $G = (V, E)$ je $F \subseteq E$ taková, že $G - F$ je nesouvislý.

Připomenutí z minula I

- Hranový řez v grafu $G = (V, E)$ je $F \subseteq E$ taková, že $G - F$ je nesouvislý.
- Vrcholový řez v grafu G je $A \subseteq V$ taková, že $G - A$ je nesouvislý.

Připomenutí z minula I

- Hranový řez v grafu $G = (V, E)$ je $F \subseteq E$ taková, že $G - F$ je nesouvislý.
- Vrcholový řez v grafu G je $A \subseteq V$ taková, že $G - A$ je nesouvislý.
- Hranová souvislost grafu G je

$$k_e(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ \min\{|F| : F \text{ je hranový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Připomenutí z minula I

- Hranový řez v grafu $G = (V, E)$ je $F \subseteq E$ taková, že $G - F$ je nesouvislý.
- Vrcholový řez v grafu G je $A \subseteq V$ taková, že $G - A$ je nesouvislý.
- Hranová souvislost grafu G je

$$k_e(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ \min\{|F| : F \text{ je hranový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Vrcholová souvislost grafu G je

$$k_v(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ n - 1, & \text{je-li } G \cong K_n \text{ s } n \geq 2, \\ \min\{|A| : A \text{ je vrcholový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Připomenutí z minula I

- Hranový řez v grafu $G = (V, E)$ je $F \subseteq E$ taková, že $G - F$ je nesouvislý.
- Vrcholový řez v grafu G je $A \subseteq V$ taková, že $G - A$ je nesouvislý.
- Hranová souvislost grafu G je

$$k_e(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ \min\{|F| \colon F \text{ je hranový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Vrcholová souvislost grafu G je

$$k_v(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ n - 1, & \text{je-li } G \cong K_n \text{ s } n \geq 2, \\ \min\{|A| \colon A \text{ je vrcholový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Graf G je hranově t-souvislý, pokud $k_e(G) \geq t$.

Připomenutí z minula I

- Hranový řez v grafu $G = (V, E)$ je $F \subseteq E$ taková, že $G - F$ je nesouvislý.
- Vrcholový řez v grafu G je $A \subseteq V$ taková, že $G - A$ je nesouvislý.
- Hranová souvislost grafu G je

$$k_e(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ \min\{|F| \colon F \text{ je hranový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Vrcholová souvislost grafu G je

$$k_v(G) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } G \cong K_1, \\ n-1, & \text{je-li } G \cong K_n \text{ s } n \geq 2, \\ \min\{|A| \colon A \text{ je vrcholový řez v } G\}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Graf G je hranově t-souvislý, pokud $k_e(G) \geq t$.
- Graf G je vrcholově t-souvislý, pokud $k_v(G) \geq t$.

Připomenutí z minula II

Připomenutí z minula II

- Při odebrání hrany hranová ani vrcholová souvislost grafu nevzroste a obě klesnou nanejvýš o 1.

Připomenutí z minula II

- Při odebrání hrany hranová ani vrcholová souvislost grafu nevzroste a obě klesnou nanejvýš o 1.
- Pro každý graf G platí $k_v(G) \leq k_e(G)$.

Připomenutí z minula II

- Při odebrání hrany hranová ani vrcholová souvislost grafu nevzroste a obě klesnou nanejvýš o 1.
- Pro každý graf G platí $k_v(G) \leq k_e(G)$.

Fordova–Fulkersonova věta

Pro každý graf G a $t \in \mathbb{N}$ platí: $k_e(G) \geq t$ právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy z G existuje aspoň t hranově disjunktních cest.

Připomenutí z minula II

- Při odebrání hrany hranová ani vrcholová souvislost grafu nevzroste a obě klesnou nanejvýš o 1.
- Pro každý graf G platí $k_v(G) \leq k_e(G)$.

Fordova–Fulkersonova věta

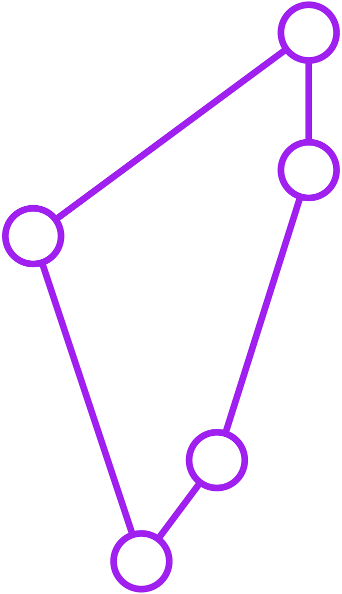
Pro každý graf G a $t \in \mathbb{N}$ platí: $k_e(G) \geq t$ právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy z G existuje aspoň t hranově disjunktních cest.

Mengerova věta

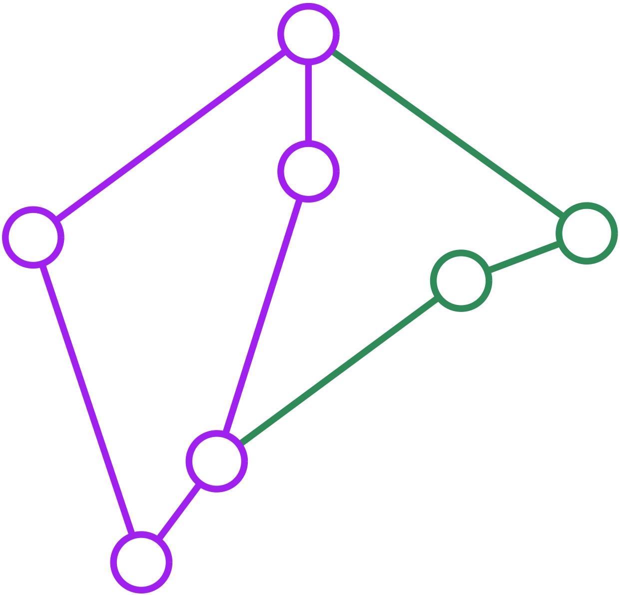
Pro každý graf G a $t \in \mathbb{N}$ platí: $k_v(G) \geq t$ právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy z G existuje aspoň t vrcholově disjunktních cest (mimo jejich koncové vrcholy).

Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší

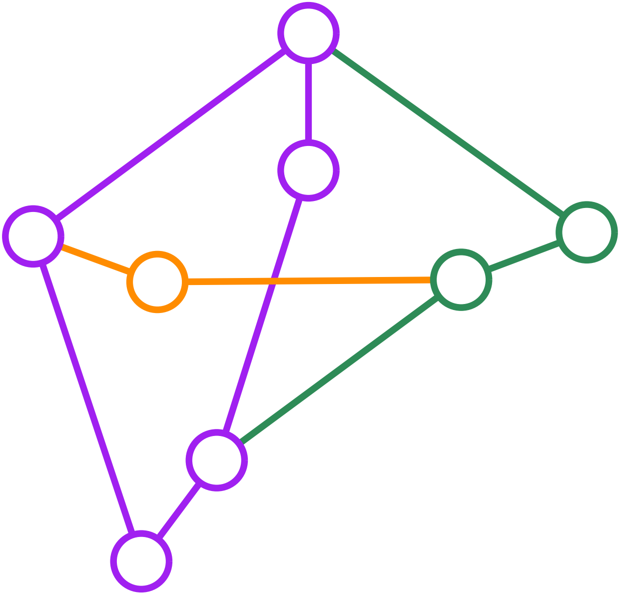
Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



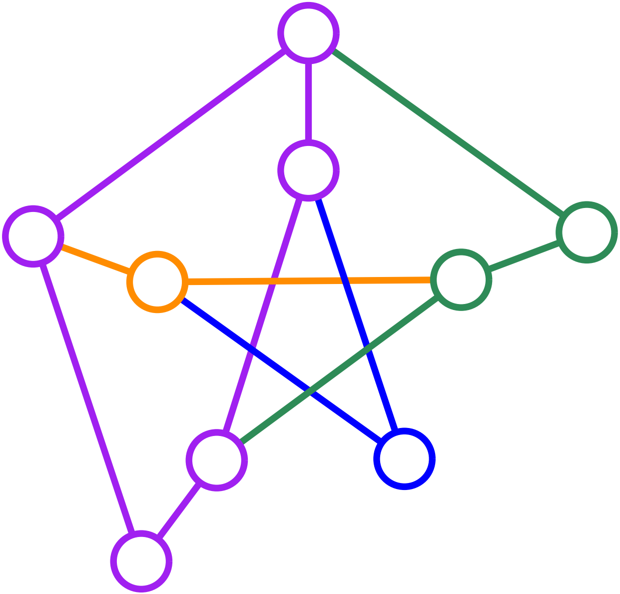
Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



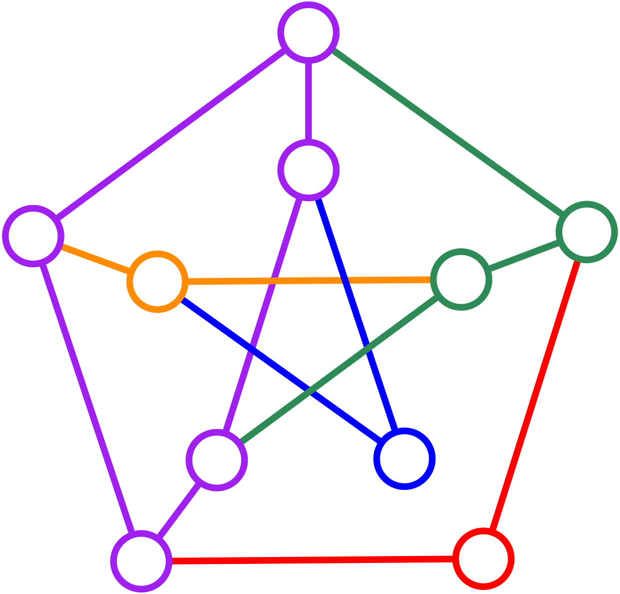
Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



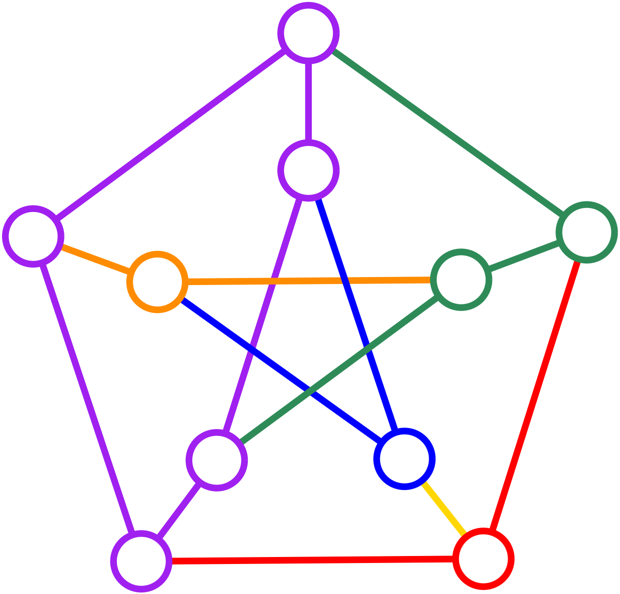
Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



Konstrukce vrcholově 2-souvislých grafů lepením uší



Počítání dvěma způsoby

Počítání dvěma způsoby

Počítáme-li prvky jedné množiny dvěma způsoby, dostaneme vždy stejný výsledek.

Počet koster v grafu K_n

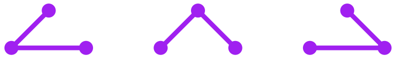
Počet koster v grafu K_n

$\kappa(2) = 1$ 

Počet koster v grafu K_n

$\kappa(2) = 1$

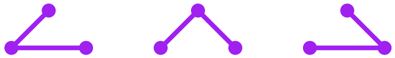
$\kappa(3) = 3$



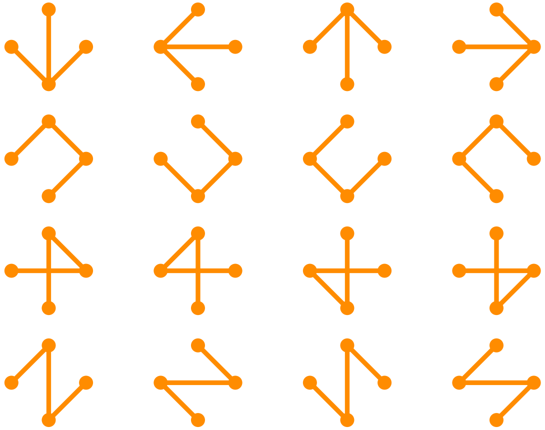
Počet koster v grafu K_n

$\kappa(2) = 1$

$\kappa(3) = 3$



$\kappa(4) = 16$



Cayleyho vzorec

Cayleyho vzorec

- Pro každé $n \geq 1$ se počet koster grafu K_n rovná n^{n-2}.

Cayleyho vzorec

- Pro každé $n \geq 1$ se počet koster grafu K_n rovná n^{n-2}.
- Objevil ho Carl Wilhelm Borchardt v roce 1860.

Cayleyho vzorec

- Pro každé $n \geq 1$ se počet koster grafu K_n rovná n^{n-2}.
- Objevil ho Carl Wilhelm Borchardt v roce 1860.

Obrázek: Carl Wilhelm Borchardt (1817–1880) a Arthur Cayley (1821–1895).

Zdroje: http://en.wikipedia.org a http://math-physics-problems.wikia.org

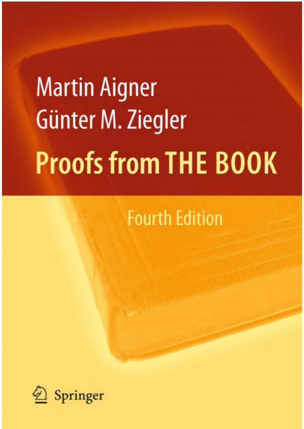
Cayleyho vzorec: důkazy

Cayleyho vzorec: důkazy

- Existuje řada důkazů. Čtyři jsou popsány v knize Proofs from the Book.

Cayleyho vzorec: důkazy

- Existuje řada důkazů. Čtyři jsou popsány v knize Proofs from the Book.

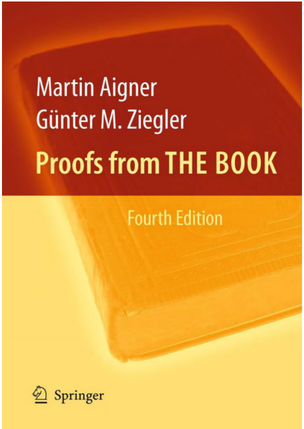


Obrázek: Paul Erdős (1913–1996) a Proofs from the Book.

Zdroje: http://en.wikipedia.org

Cayleyho vzorec: důkazy

- Existuje řada důkazů. Čtyři jsou popsány v knize Proofs from the Book.



Obrázek: Paul Erdős (1913–1996) a Proofs from the Book.

Zdroje: http://en.wikipedia.org

- Ukážeme nejjednodušší z nich, objevený Jimem Pitmanem v roce 1999.

Počet koster v grafu $K_n - e$

Počet koster v grafu $K_n - e$

Počet koster v grafu $K_n - e$

$\kappa(K_2 - e) = 0$

Počet koster v grafu $K_n - e$

$\kappa(K_2 - e) = 0$

Počet koster v grafu $K_n - e$

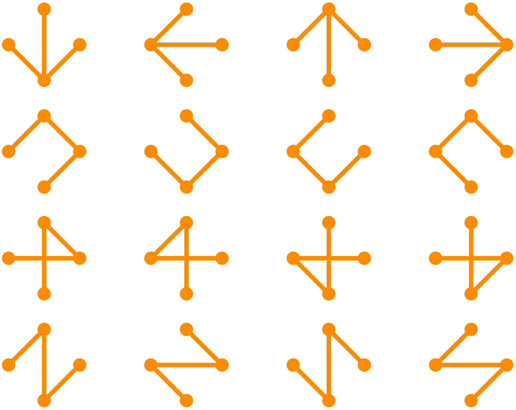
$\kappa(K_2 - e) = 0$

$\kappa(K_3 - e) = 1$ 

Počet koster v grafu $K_n - e$

$\kappa(K_2 - e) = 0$

$\kappa(K_3 - e) = 1$

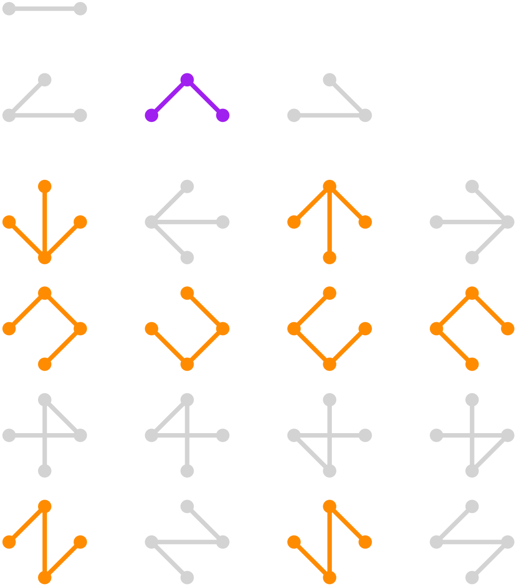


Počet koster v grafu $K_n - e$

$\kappa(K_2 - e) = 0$

$\kappa(K_3 - e) = 1$

$\kappa(K_4 - e) = 8$



"A nonstandard method of counting trees: Put a cat into each tree, walk your dog, and count how often he barks."

Zdroj: „Proofs from the Book" (Aigner, Ziegler)

“A nonstandard method of counting trees: Put a cat into each tree, walk your dog, and count how often he barks.”

Zdroj: „Proofs from the Book“ (Aigner, Ziegler)

Děkuji za pozornost.