Kombinatorika a grafy I

Martin Balko

3. přednáška

19. října 2021

Vytvořující funkce a jejich aplikace

Binární zakořeněné stromy

- Příklady binárních zakořeněných stromů s ≤ 4 vrcholy:

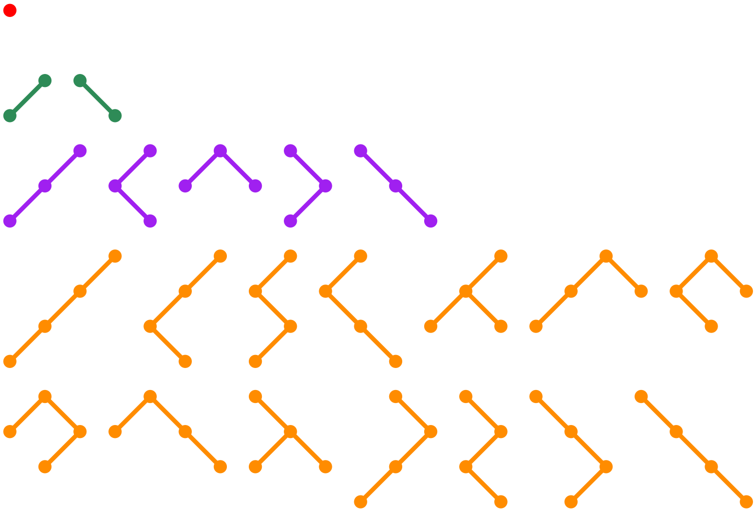
$b_0 = 1$

$b_1 = 1$

$b_2 = 2$

$b_3 = 5$

$b_4 = 14$



Catalanova čísla

Catalanova čísla

- Definována jako $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ pro $n \geq 0$.

Catalanova čísla

- Definována jako $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ pro $n \geq 0$.
- Hodnoty: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, \ldots$

Catalanova čísla

- Definována jako $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ pro $n \geq 0$.
- Hodnoty: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, \ldots$
- Objevil je Leonhard Euler v roce 1751.

Obrázek: Leonhard Euler (1707–1783) a Eugène C. Catalan (1814–1894).

Zdroj: http://en.wikipedia.org

Catalanova čísla

- Definována jako $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ pro $n \geq 0$.
- Hodnoty: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, \ldots$
- Objevil je Leonhard Euler v roce 1751.

Obrázek: Leonhard Euler (1707–1783) a Eugène C. Catalan (1814–1894).

Zdroj: http://en.wikipedia.org

- Je známo přes 200 intepretací: http://www-math.mit.edu/~rstan/ec

Interpretace Catalanových čísel I

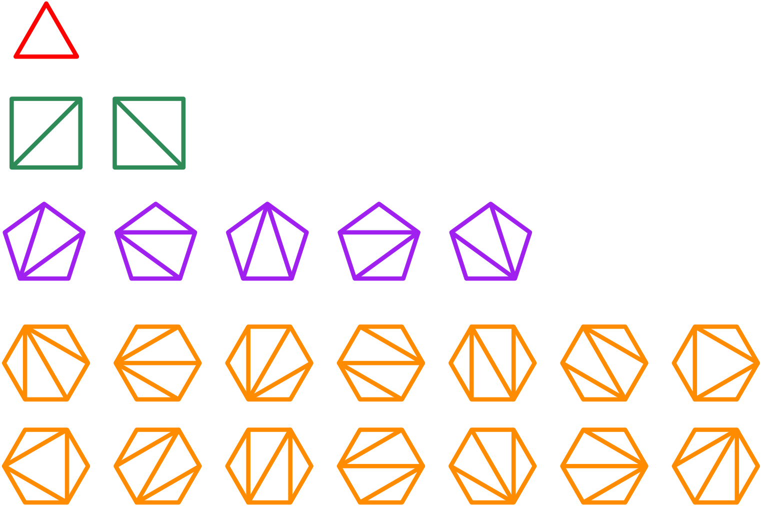
- Platí C_n = počet triangulací $(n+2)$-gonu.

$C_1 = 1$

$C_2 = 2$

$C_3 = 5$

$C_4 = 14$



Interpretace Catalanových čísel II

- Platí C_n = počet správných uzávorkování s n páry závorek.

$C_1 = 1$ ()

$C_2 = 2$ ()() (())

$C_3 = 5$ ()()() ()(()) (()()) (())() ((()))

$C_4 = 14$

()()()() (())()() ()(())() ()()(())

()((())) (()()()) (((()))) ((()))()

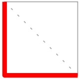
(()())() ()(()()) (())(()) (()(()))

((())()) ((()()))

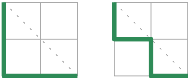
Interpretace Catalanových čísel III

- Platí C_n = počet Dyckových cest v $(n+1) \times (n+1)$ mřížce (= schodišť pod diagonálou).

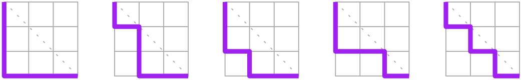
$C_1 = 1$



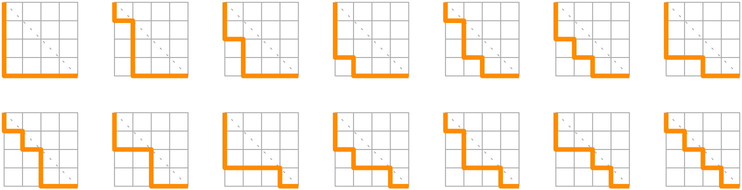
$C_2 = 2$



$C_3 = 5$



$C_4 = 14$



Interpretace Catalanových čísel IV

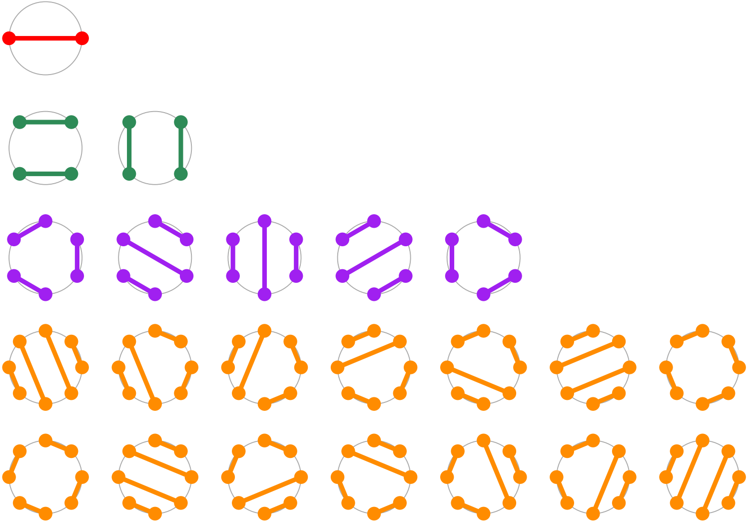
- Platí C_n = počet způsobů, jak si $2n$ lidí u stolu může potřást rukama, aniž by došlo ke křížení.

$C_1 = 1$

$C_2 = 2$

$C_3 = 5$

$C_4 = 14$



Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na liché sčítance.

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na liché sčítance.

$$3 = 3 = 1+1+1 \Rightarrow l_3 = 2,$$

$$4 = 3+1 = 1+1+1+1 \Rightarrow l_4 = 2,$$

$$5 = 5 = 3+1+1 = 1+1+1+1+1 \Rightarrow l_5 = 3,$$

$$6 = 5+1 = 3+3 = 3+1+1+1 = 1+\cdots+1 \Rightarrow l_6 = 4.$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na liché sčítance.

$$3 = 3 = 1+1+1 \Rightarrow l_3 = 2,$$
$$4 = 3+1 = 1+1+1+1 \Rightarrow l_4 = 2,$$
$$5 = 5 = 3+1+1 = 1+1+1+1+1 \Rightarrow l_5 = 3,$$
$$6 = 5+1 = 3+3 = 3+1+1+1 = 1+\cdots+1 \Rightarrow l_6 = 4.$$

- Buď r_n počet neuspořádaných rozkladů n na různé sčítance.

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na liché sčítance.

$$
\begin{aligned}
3 &= 3 = 1+1+1 \Rightarrow l_3 = 2,\\
4 &= 3+1 = 1+1+1+1 \Rightarrow l_4 = 2,\\
5 &= 5 = 3+1+1 = 1+1+1+1+1 \Rightarrow l_5 = 3,\\
6 &= 5+1 = 3+3 = 3+1+1+1 = 1+\cdots+1 \Rightarrow l_6 = 4.
\end{aligned}
$$

- Buď r_n počet neuspořádaných rozkladů n na různé sčítance.

$$
\begin{aligned}
3 &= 3 = 2+1 \Rightarrow r_3 = 2,\\
4 &= 4 = 3+1 \Rightarrow r_4 = 2,\\
5 &= 5 = 4+1 = 3+2 \Rightarrow r_5 = 3,\\
6 &= 6 = 5+1 = 4+2 = 3+2+1 \Rightarrow r_6 = 4,
\end{aligned}
$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na liché sčítance.

$$
\begin{aligned}
3 &= 3 = 1+1+1 \Rightarrow l_3 = 2,\\
4 &= 3+1 = 1+1+1+1 \Rightarrow l_4 = 2,\\
5 &= 5 = 3+1+1 = 1+1+1+1+1 \Rightarrow l_5 = 3,\\
6 &= 5+1 = 3+3 = 3+1+1+1 = 1+\cdots+1 \Rightarrow l_6 = 4.
\end{aligned}
$$

- Buď r_n počet neuspořádaných rozkladů n na různé sčítance.

$$
\begin{aligned}
3 &= 3 = 2+1 \Rightarrow r_3 = 2,\\
4 &= 4 = 3+1 \Rightarrow r_4 = 2,\\
5 &= 5 = 4+1 = 3+2 \Rightarrow r_5 = 3,\\
6 &= 6 = 5+1 = 4+2 = 3+2+1 \Rightarrow r_6 = 4,
\end{aligned}
$$

Věta

Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $l_n = r_n$.

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ buď l_n počet neuspořádaných rozkladů n na liché sčítance.

$$3 = 3 = 1+1+1 \Rightarrow l_3 = 2,$$
$$4 = 3+1 = 1+1+1+1 \Rightarrow l_4 = 2,$$
$$5 = 5 = 3+1+1 = 1+1+1+1+1 \Rightarrow l_5 = 3,$$
$$6 = 5+1 = 3+3 = 3+1+1+1 = 1+\cdots+1 \Rightarrow l_6 = 4.$$

- Buď r_n počet neuspořádaných rozkladů n na různé sčítance.

$$3 = 3 = 2+1 \Rightarrow r_3 = 2,$$
$$4 = 4 = 3+1 \Rightarrow r_4 = 2,$$
$$5 = 5 = 4+1 = 3+2 \Rightarrow r_5 = 3,$$
$$6 = 6 = 5+1 = 4+2 = 3+2+1 \Rightarrow r_6 = 4,$$

Věta

Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $l_n = r_n$.

- Stačí ukázat $l(x) = r(x)$, kde $l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n$ a $r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$.

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$l(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots$$
$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots$$

$$r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned} l(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots \end{aligned}$$

$$r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

.

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned} l(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots \end{aligned}$$

$$r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$
\begin{aligned}
l(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots
\end{aligned}
$$

$$
r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots
$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$
l(x) = \frac{1+x}{1} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdots = r(x).
$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$
\begin{aligned}
l(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots
\end{aligned}
$$

$$r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1+x}{1} \cdot \frac{1+x^2}{1} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned} l(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots \end{aligned}$$

$$r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1+x}{1} \cdot \frac{1+x^2}{1} \cdot \frac{1+x^3}{1} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned} l(x) &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots \\ &= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots \end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1+x}{1}\cdot\frac{1+x^2}{1}\cdot\frac{1+x^3}{1}\cdot\frac{1+x^4}{1}\cdots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned} l(x) &= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots \\ &= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots \end{aligned}$$

$$r(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$\begin{aligned} l(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5}\cdots \end{aligned}$$

$$r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$l(x) = \frac{\cancel{1-x^2}}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{\cancel{1-x^2}} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots = r(x).$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$
\begin{aligned}
l(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots
\end{aligned}
$$

$$
r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots
$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$
l(x) = \frac{\cancel{1-x^2}}{1-x} \cdot \frac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{\cancel{1-x^4}} \cdots = r(x).
$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$
\begin{aligned}
l(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots
\end{aligned}
$$

$$
r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots
$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$
l(x) = \frac{\cancel{1-x^2}}{1-x} \cdot \frac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}} \cdot \frac{\cancel{1-x^6}}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{\cancel{1-x^4}} \cdots = r(x).
$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$
\begin{aligned}
l(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots
\end{aligned}
$$

$$
r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots
$$

- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

$$
l(x) = \frac{\cancel{1-x^2}}{1-x} \cdot \frac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}} \cdot \frac{\cancel{1-x^6}}{1-x^3} \cdot \frac{\cancel{1-x^8}}{\cancel{1-x^4}} \cdots = r(x).
$$

Bonusová aplikace: rozklady čísel na liché a různé části

$$
\begin{aligned}
l(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)\cdots \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots
\end{aligned}
$$

$$
r(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\cdots
$$

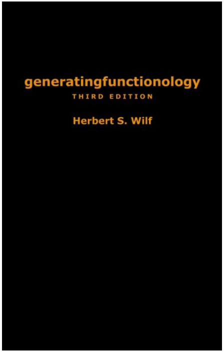
- Dostáváme rovnost $l(x) = r(x)$, protože

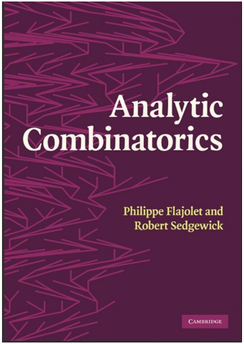
$$
l(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdots = r(x).
$$

Pro zájemce

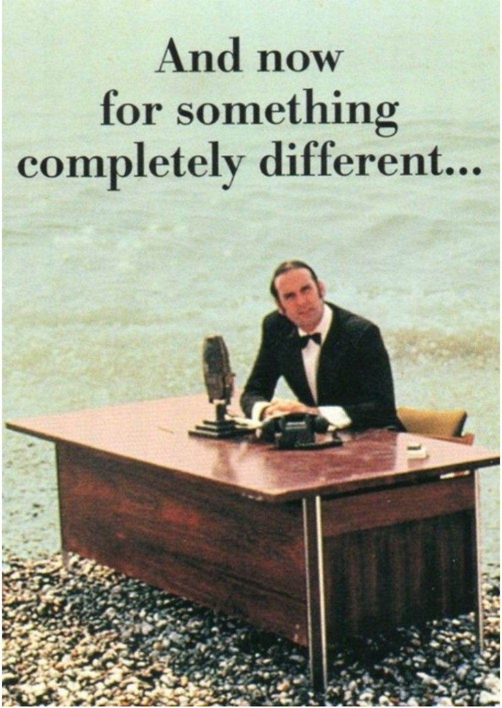
Pro zájemce

- Více se o vytvořujících funkcích lze dozvědět například
  - na přednášce Analytická kombinatorika,
  - z knížky *Generatingfunctionology* (H. Wilf): https://www.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf,
  - z knížky *Analytic Combinatorics* (P. Flajolet, R. Sedgewick): http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/book.pdf.



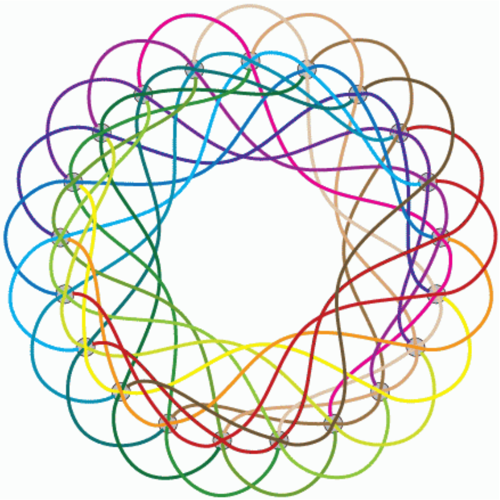


Zdroje: http://crcpress.com a algo.inria.fr



Zdroj: slideplayer.com

Konečné projektivní roviny



Zdroj: http://math.stackexchange.com

Děkuji za pozornost.