Kombinatorika a grafy I

Martin Balko

2. přednáška

12. října 2021

Vytvořující funkce

Příklad ze života

Příklad ze života

- Kolika způsoby můžeme naplnit košík $n \in \mathbb{N}_0$ kousky ovoce tak, aby:
  - počet jablek byl sudý,
  - počet švestek byl násobek pěti,
  - v košíku byly nanejvýš čtyři pomeranče
  - a nanejvýš jedno avokádo?

Zdroj: https://123RF.com

Příklad ze života

- Kolika způsoby můžeme naplnit košík $n \in \mathbb{N}_0$ kousky ovoce tak, aby:
  - počet jablek byl sudý,
  - počet švestek byl násobek pěti,
  - v košíku byly nanejvýš čtyři pomeranče
  - a nanejvýš jedno avokádo?

Zdroj: https://123RF.com

- Zajímá nás koeficient u x^n v mocninné řadě

$$(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + x + \cdots + x^4)(1 + x).$$

Příklad ze života

- Kolika způsoby můžeme naplnit košík $n \in \mathbb{N}_0$ kousky ovoce tak, aby:
  - počet jablek byl sudý,
  - počet švestek byl násobek pěti,
  - v košíku byly nanejvýš čtyři pomeranče
  - a nanejvýš jedno avokádo?

Zdroj: https://123RF.com

- Zajímá nás koeficient u x^n v mocninné řadě

$$(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + x + \cdots + x^4)(1 + x).$$

- Se znalostmi z dnešní přednášky budeme schopni najít odpověď:

Příklad ze života

- Kolika způsoby můžeme naplnit košík $n \in \mathbb{N}_0$ kousky ovoce tak, aby:
  - počet jablek byl sudý,
  - počet švestek byl násobek pěti,
  - v košíku byly nanejvýš čtyři pomeranče
  - a nanejvýš jedno avokádo?

Zdroj: https://123RF.com

- Zajímá nás koeficient u x^n v mocninné řadě

$$(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + x + \cdots + x^4)(1 + x).$$

- Se znalostmi z dnešní přednášky budeme schopni najít odpověď: $n + 1$.

Základní operace s mocninnými řadami

$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$
$x^n a(x)$	$(0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$ (n nul na začátku)
$\frac{a(x) - a_0 - \cdots - a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}$	$(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^i a_i, \dots)$
$a(x^n)$	$(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots)$ (střídavě $n-1$ nul)
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, ia_i, \dots)$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_i}{i+1}, \dots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$

K příkladu ze života

K příkladu ze života

Zdroj: https://123RF.com

- Zajímá nás koeficient a_n v mocninné řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + \cdots + x^4)(1 + x)$$

K příkladu ze života

Zdroj: https://123RF.com

- Zajímá nás koeficient a_n v mocninné řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + \cdots + x^4)(1 + x)$$

$$= \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot (1 + x)$$

K příkladu ze života

Zdroj: https://123RF.com

- Zajímá nás koeficient a_n v mocninné řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + \cdots + x^4)(1 + x)$$
$$= \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot (1 + x) = \frac{1}{(1 - x)^2}.$$

K příkladu ze života

Zdroj: https://123RF.com

- Zajímá nás koeficient a_n v mocninné řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + \cdots + x^4)(1 + x)$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot (1+x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

- Platí $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ a tedy podle operace derivace máme koeficient

K příkladu ze života

Zdroj: https://123RF.com

- Zajímá nás koeficient a_n v mocninné řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + \cdots + x^4)(1 + x)$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot (1+x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

- Platí $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ a tedy podle operace derivace máme koeficient

$$a_n = n + 1.$$

Fibonacciho čísla

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).

Fibonacciho čísla

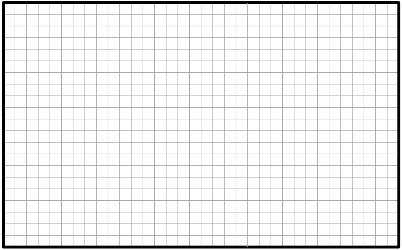
- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, . . .).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

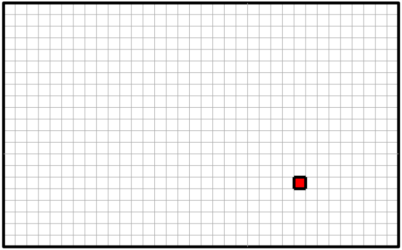


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

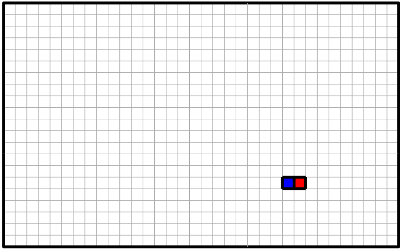


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

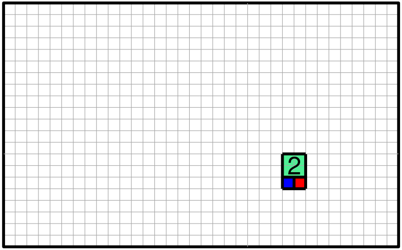


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

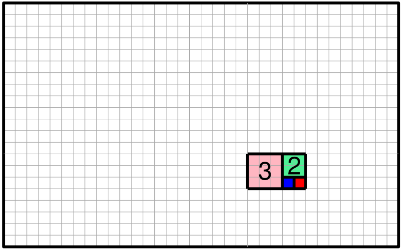


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, . . .).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

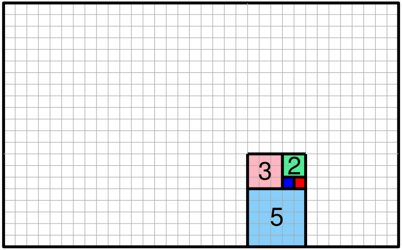


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

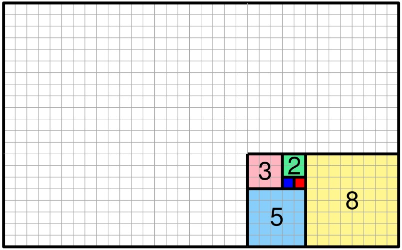


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

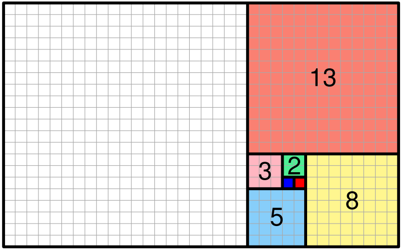


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

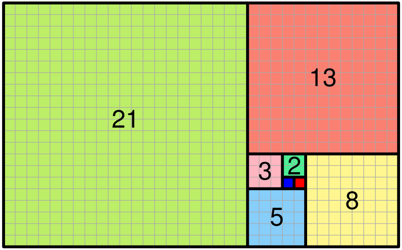


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

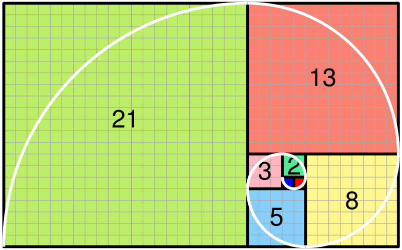


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, . . .).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

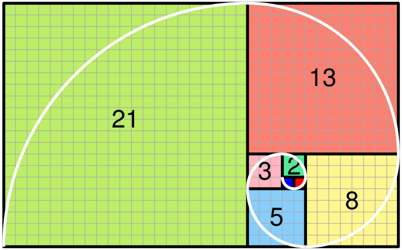


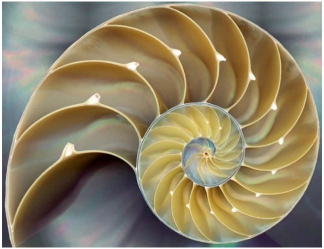
Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$



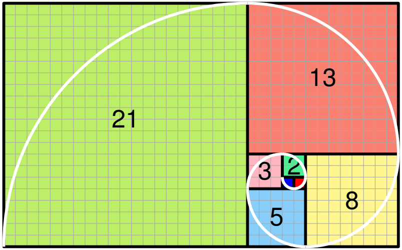


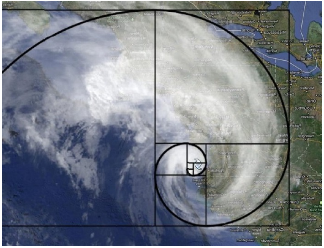
Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, …).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$



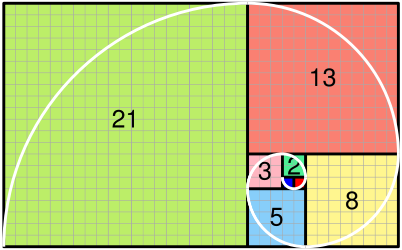


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

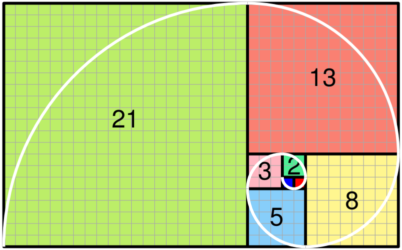


Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://pixdaus.com

Fibonacciho čísla

- Definována rekurzivně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$.
- V Indii známa již od starověku, v Evropě poprvé zmíněna v knize Liber Abaci (1202) od Fibonacciho (1170–1250).
- Množství aplikací v matematice a informatice (složitost Eukleidova algoritmu, Fibonacciho haldy, Fibonacciho kódování čísel, ...).
- Fibonacciho čísla souvisí se zlatým řezem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$



Obrázek: Fibonacciho spirála a kde ji (ne)hledat.

Zdroj: http://insteading.com

Binetův vzorec

Binetův vzorec

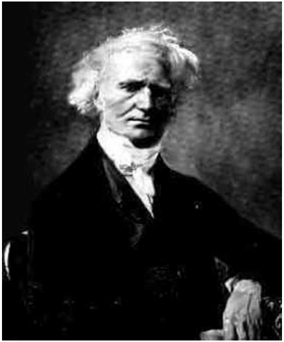
- Vytvořující funkce lze použít k odvození Binetova vzorce:

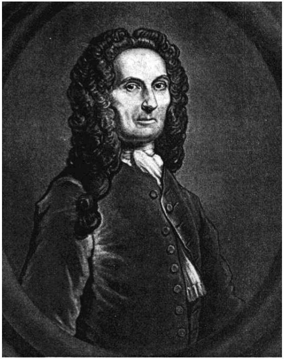
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Binetův vzorec

- Vytvořující funkce lze použít k odvození Binetova vzorce:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$



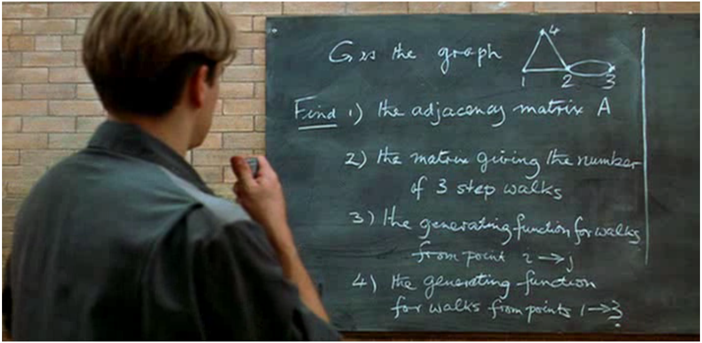


Obrázek: Jacques P. M. Binet (1786–1856) a Abraham de Moivre (1667–1754).

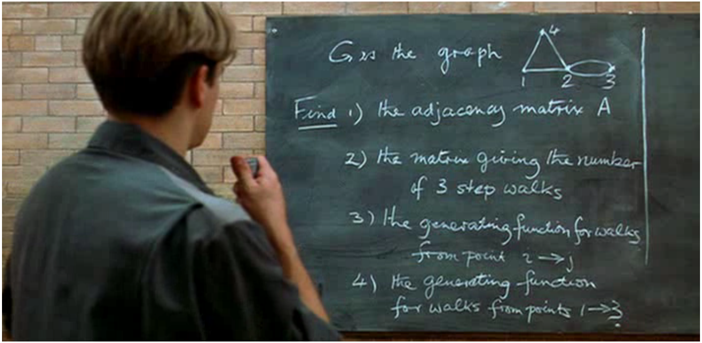
Zdroje: http://matematicaenigmatica.blogspot.com a http://cs.wikipedia.org

Kuchařka: rozklad na parciální zlomky

- Vstup: podíl $\frac{p(x)}{q(x)}$ polynomů s $st(p(x)) < st(q(x))$, kde $q(x)$ má rozklad
  $$q(x) = (x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_N)^{n_N} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{m_1} \cdots (x^2 + \alpha_M x + \beta_M)^{m_M}.$$
- Výstup: rozklad R racionální funkce $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parciální zlomky.
- Metoda: Za každý člen $(x - a_i)^{n_i}$ přidat do rozkladu R
  $$\frac{A_{i,1}}{x - a_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,n_i}}{(x - a_i)^{n_i}}$$
  a za každý člen $(x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^{m_i}$ přidat do rozkladu R
  $$\frac{B_{i,1}x + C_{i,1}}{x^2 + \alpha_i x + \beta_i} + \frac{B_{i,2}x + C_{i,2}}{(x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^2} + \cdots + \frac{B_{i,m_i}x + C_{i,m_i}}{(x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^{m_i}}.$$
  Rovnici $\frac{p(x)}{q(x)} = R$ vynásobit členem $q(x)$ a po pokrácení dostat za každý člen výsledného polynomu $Rq(x)$ jednu rovnici. Celkově dostaneme systém lineárních rovnic s $n_1 + \cdots + n_N + 2m_1 + \cdots + 2m_M$ proměnnými $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ a $C_{i,j}$. Ten pak stačí vyřešit.



Zdroj: Good Will Hunting.



Zdroj: Good Will Hunting.

Děkuji za pozornost.