Kombinatorika a grafy I

Martin Balko

11. přednáška

14. prosince 2021

Úvod do Ramseyovy teorie

„Každý dost velký systém obsahuje homogenní podsystém dané velikosti."

Připomenutí z minula

Připomenutí z minula

Věta 10.2 (Dirichletův princip)

Pro každé $r, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, každou množinu X velikosti aspoň $1 + \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)$ a každé r-obarvení množiny X existuje $i \in \{1, \dots, r\}$ a podmnožina množiny X velikosti n_i, jejíž všechny prvky mají i-tou barvu.

Připomenutí z minula

Věta 10.2 (Dirichletův princip)

Pro každé $r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, každou množinu X velikosti aspoň $1 + \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)$ a každé r-obarvení množiny X existuje $i \in \{1, \ldots, r\}$ a podmnožina množiny X velikosti n_i, jejíž všechny prvky mají i-tou barvu.

- Pro $k, \ell \in \mathbb{N}$ je Ramseyovo číslo $R(k, \ell)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé X s $|X| \geq N$ a každé červeno-modré-obarvení množiny $\binom{X}{2}$ existuje buď k prvků z X se všemi páry červenými nebo ℓ prvků z X se všemi páry modrými.

Připomenutí z minula

Věta 10.2 (Dirichletův princip)

Pro každé $r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, každou množinu X velikosti aspoň $1 + \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)$ a každé r-obarvení množiny X existuje $i \in \{1, \ldots, r\}$ a podmnožina množiny X velikosti n_i, jejíž všechny prvky mají i-tou barvu.

- Pro $k, \ell \in \mathbb{N}$ je Ramseyovo číslo $R(k, \ell)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé X s $|X| \geq N$ a každé červeno-modré-obarvení množiny $\binom{X}{2}$ existuje buď k prvků z X se všemi páry červenými nebo ℓ prvků z X se všemi páry modrými.

Věta 10.3 (Ramseyova věta pro grafy a dvě barvy)

Pro každé $k, \ell \in \mathbb{N}$ platí $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Připomenutí z minula

Věta 10.2 (Dirichletův princip)

Pro každé $r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, každou množinu X velikosti aspoň $1 + \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)$ a každé r-obarvení množiny X existuje $i \in \{1, \ldots, r\}$ a podmnožina množiny X velikosti n_i, jejíž všechny prvky mají i-tou barvu.

- Pro $k, \ell \in \mathbb{N}$ je Ramseyovo číslo $R(k, \ell)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé X s $|X| \geq N$ a každé červeno-modré-obarvení množiny $\binom{X}{2}$ existuje buď k prvků z X se všemi páry červenými nebo ℓ prvků z X se všemi páry modrými.

Věta 10.3 (Ramseyova věta pro grafy a dvě barvy)

Pro každé $k, \ell \in \mathbb{N}$ platí $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Věta 10.4

Pro každé $k \geq 3$ platí $R(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Připomenutí z minula

Věta 10.2 (Dirichletův princip)

Pro každé $r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, každou množinu X velikosti aspoň $1 + \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1)$ a každé r-obarvení množiny X existuje $i \in \{1, \ldots, r\}$ a podmnožina množiny X velikosti n_i, jejíž všechny prvky mají i-tou barvu.

- Pro $k, \ell \in \mathbb{N}$ je Ramseyovo číslo $R(k, \ell)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé X s $|X| \geq N$ a každé červeno-modré-obarvení množiny $\binom{X}{2}$ existuje buď k prvků z X se všemi páry červenými nebo ℓ prvků z X se všemi páry modrými.

Věta 10.3 (Ramseyova věta pro grafy a dvě barvy)

Pro každé $k, \ell \in \mathbb{N}$ platí $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Věta 10.4

Pro každé $k \geq 3$ platí $R(k, k) \geq 2^{k/2}$.

- Tedy $\sqrt{2}^n \leq R(n, n) \leq 4^n$.

Ramseyova věta

Ramseyova věta

- Pro $p, r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ je Ramseyovo číslo $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé X s $|X| \geq N$ a každé r-obarvení množiny $\binom{X}{p}$ existuje $i \in \{1, \ldots, r\}$ a podmnožina množiny X velikosti n_i, jejíž všechny p-tice mají i-tou barvu.

Ramseyova věta

- Pro $p, r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ je Ramseyovo číslo $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé X s $|X| \geq N$ a každé r-obarvení množiny $\binom{X}{p}$ existuje $i \in \{1, \ldots, r\}$ a podmnožina množiny X velikosti n_i, jejíž všechny p-tice mají i-tou barvu.

Věta 11.1 (Ramseyova věta pro p-tice, 1930)

Pro každé $p, r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ je $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ konečné.

Ramseyova věta

- Pro $p, r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ je Ramseyovo číslo $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé X s $|X| \geq N$ a každé r-obarvení množiny $\binom{X}{p}$ existuje $i \in \{1, \ldots, r\}$ a podmnožina množiny X velikosti n_i, jejíž všechny p-tice mají i-tou barvu.

Věta 11.1 (Ramseyova věta pro p-tice, 1930)

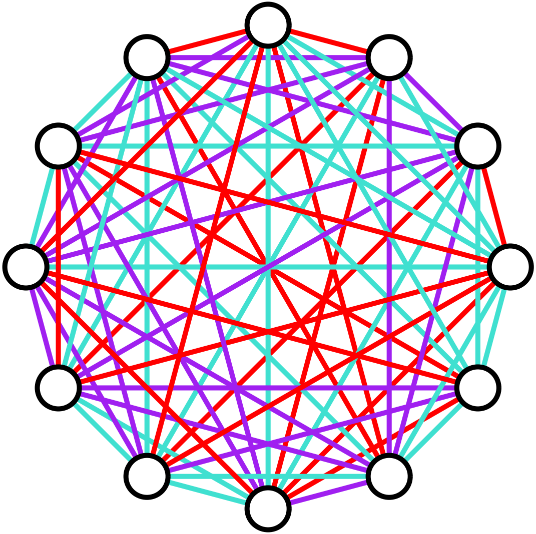
Pro každé $p, r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ je $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ konečné.

Obrázek: Frank P. Ramsey (1903–1930).

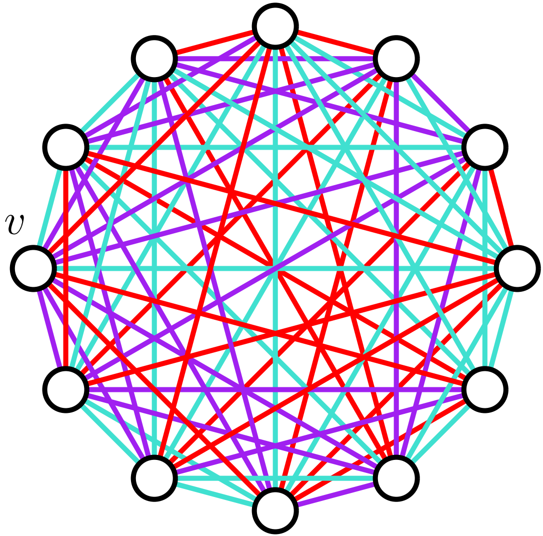
Zdroj: http://history.mcs.st-andrews.ac.uk

Ramseyova věta: případ $p = 2$, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$

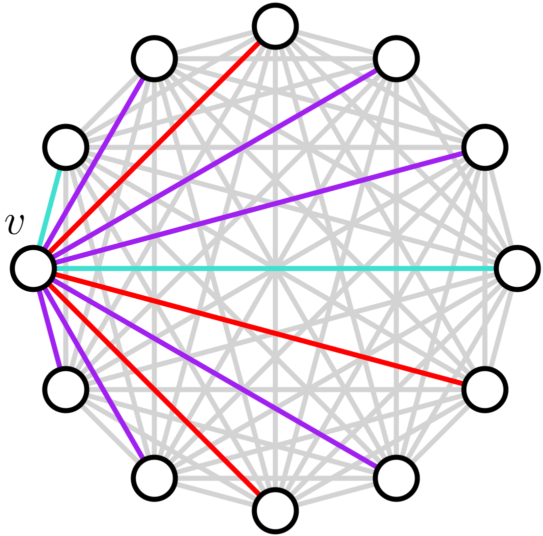
Ramseyova věta: případ $p = 2$, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$



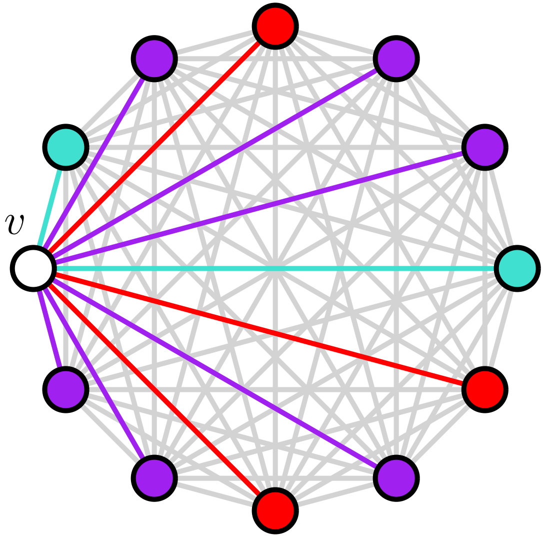
Ramseyova věta: případ $p = 2$, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$



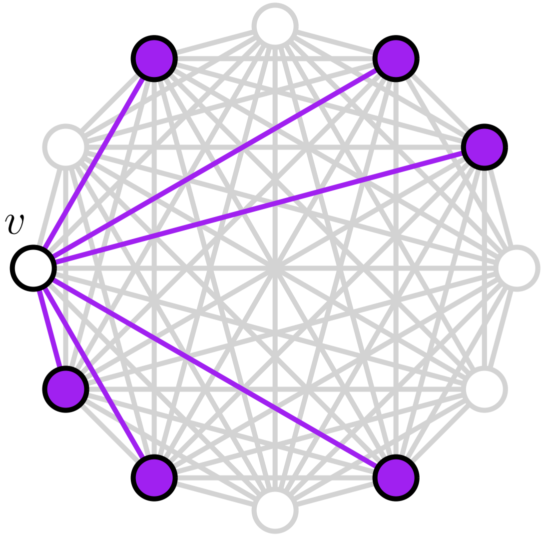
Ramseyova věta: případ $p = 2$, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$



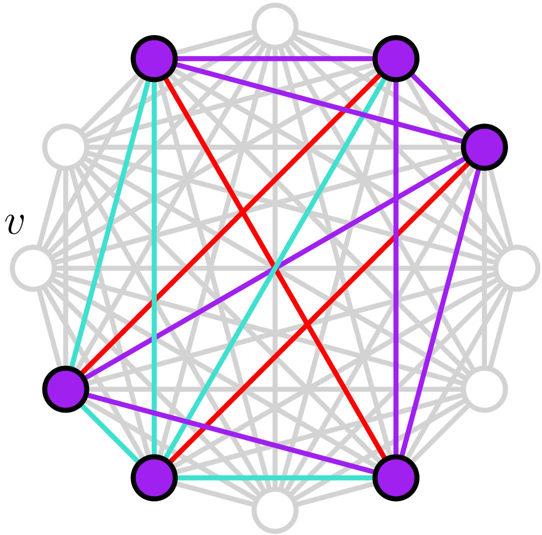
Ramseyova věta: případ $p = 2$, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$



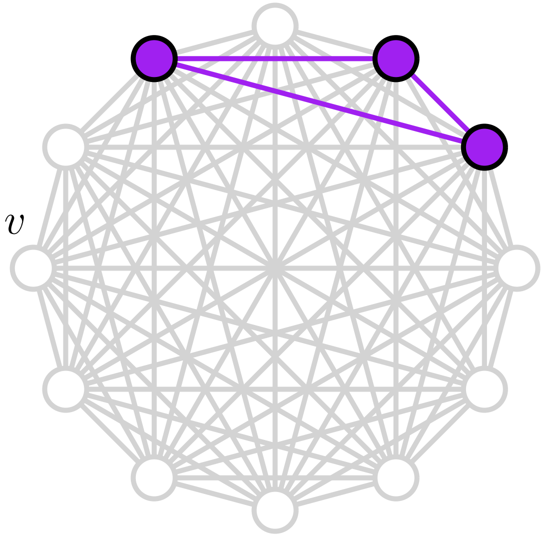
Ramseyova věta: případ $p = 2$, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$



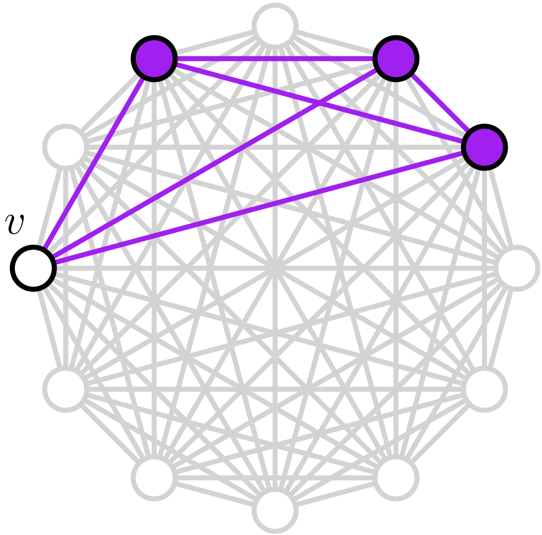
Ramseyova věta: případ $p = 2$, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$



Ramseyova věta: případ $p = 2$, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$



Ramseyova věta: případ $p = 2$, $n_1 = n_2 = n_3 = 4$



Odhady na Ramseyova čísla

Odhady na Ramseyova čísla

- Uvedený odhad na $R_p(n, n)$ roste neuvěřitelně rychle.

Odhady na Ramseyova čísla

- Uvedený odhad na $R_p(n, n)$ roste neuvěřitelně rychle.
- Jiným důkazem se dá ukázat, že $R_p(n, n) \leq \mathrm{tow}_{p-1}(O(n))$, kde tow je věžovitá funkce definovaná následovně: $\mathrm{tow}_0(x) = x$ a $\mathrm{tow}_h(x) = 2^{\mathrm{tow}_{h-1}(x)}$ pro $h \geq 1$.

Odhady na Ramseyova čísla

- Uvedený odhad na $R_p(n,n)$ roste neuvěřitelně rychle.
- Jiným důkazem se dá ukázat, že $R_p(n,n) \leq \mathrm{tow}_{p-1}(O(n))$, kde tow je věžovitá funkce definovaná následovně: $\mathrm{tow}_0(x) = x$ a $\mathrm{tow}_h(x) = 2^{\mathrm{tow}_{h-1}(x)}$ pro $h \geq 1$.
    - Tedy $R_1(n,n) \leq O(n)$, $R_2(n,n) \leq 2^{O(n)}$, $R_3(n,n) \leq 2^{2^{O(n)}}$, ...

Odhady na Ramseyova čísla

- Uvedený odhad na $R_p(n,n)$ roste neuvěřitelně rychle.
- Jiným důkazem se dá ukázat, že $R_p(n,n) \leq \mathrm{tow}_{p-1}(O(n))$, kde tow je věžovitá funkce definovaná následovně: $\mathrm{tow}_0(x) = x$ a $\mathrm{tow}_h(x) = 2^{\mathrm{tow}_{h-1}(x)}$ pro $h \geq 1$.
  - Tedy $R_1(n,n) \leq O(n)$, $R_2(n,n) \leq 2^{O(n)}$, $R_3(n,n) \leq 2^{2^{O(n)}}$, ...
- Pro $p \geq 3$ je známý jen slabší dolní odhad $R_p(n,n) \geq \mathrm{tow}_{p-2}(\Omega(n^2))$.

Odhady na Ramseyova čísla

- Uvedený odhad na $R_p(n,n)$ roste neuvěřitelně rychle.
- Jiným důkazem se dá ukázat, že $R_p(n,n) \leq \mathrm{tow}_{p-1}(O(n))$, kde tow je věžovitá funkce definovaná následovně: $\mathrm{tow}_0(x) = x$ a $\mathrm{tow}_h(x) = 2^{\mathrm{tow}_{h-1}(x)}$ pro $h \geq 1$.
  - Tedy $R_1(n,n) \leq O(n)$, $R_2(n,n) \leq 2^{O(n)}$, $R_3(n,n) \leq 2^{2^{O(n)}}$, ...
- Pro $p \geq 3$ je známý jen slabší dolní odhad $R_p(n,n) \geq \mathrm{tow}_{p-2}(\Omega(n^2))$.
  - Tedy $R_3(n,n) \geq 2^{\Omega(n^2)}$.

Odhady na Ramseyova čísla

- Uvedený odhad na $R_p(n,n)$ roste neuvěřitelně rychle.
- Jiným důkazem se dá ukázat, že $R_p(n,n) \leq \mathrm{tow}_{p-1}(O(n))$, kde tow je věžovitá funkce definovaná následovně: $\mathrm{tow}_0(x) = x$ a $\mathrm{tow}_h(x) = 2^{\mathrm{tow}_{h-1}(x)}$ pro $h \geq 1$.
  - Tedy $R_1(n,n) \leq O(n)$, $R_2(n,n) \leq 2^{O(n)}$, $R_3(n,n) \leq 2^{2^{O(n)}}$, ...
- Pro $p \geq 3$ je známý jen slabší dolní odhad $R_p(n,n) \geq \mathrm{tow}_{p-2}(\Omega(n^2))$.
  - Tedy $R_3(n,n) \geq 2^{\Omega(n^2)}$.

Domněnka (Erdős, Hajnal, Rado), 500\$

Platí $R_3(n,n) \geq 2^{2^{\Omega(n)}}$.

Erdősova–Szekeresova věta

Erdősova–Szekeresova věta

- Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $ES(k) \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina s aspoň $ES(k)$ body v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze obsahuje k bodů v konvexní poloze.

Erdősova–Szekeresova věta

- Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $ES(k) \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina s aspoň $ES(k)$ body v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze obsahuje k bodů v konvexní poloze.
- Dokázali ji Paul Erdős a George Szekeres v roce 1935.

Erdősova–Szekeresova věta

- Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $ES(k) \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina s aspoň $ES(k)$ body v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze obsahuje k bodů v konvexní poloze.
- Dokázali ji Paul Erdős a George Szekeres v roce 1935.
- Přezdíváno Happy Ending Problem.

Erdősova–Szekeresova věta

- Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $ES(k) \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina s aspoň $ES(k)$ body v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze obsahuje k bodů v konvexní poloze.
- Dokázali ji Paul Erdős a George Szekeres v roce 1935.
- Přezdíváno Happy Ending Problem.

Obrázek: Esther Klein (1910–2005), George Szekeres (1911–2005) a Paul Erdős (1913–1996).

Zdroj: http://quantamagazine.org

Erdősova–Szekeresova domněnka

Erdősova–Szekeresova domněnka

- Ukázali jsme si, že $ES(k) \leq R_4(k, 5)$.

Erdősova–Szekeresova domněnka

- Ukázali jsme si, že $ES(k) \leq R_4(k, 5)$.
- Michael Tarsy u zkoušky dokázal $ES(k) \leq R_3(k, k)$.

Erdősova–Szekeresova domněnka

- Ukázali jsme si, že $ES(k) \leq R_4(k, 5)$.
- Michael Tarsy u zkoušky dokázal $ES(k) \leq R_3(k, k)$.
- Erdős a Szekeres ukázali $2^{k-2} + 1 \leq ES(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1$.

Erdősova–Szekeresova domněnka

- Ukázali jsme si, že $ES(k) \leq R_4(k, 5)$.
- Michael Tarsy u zkoušky dokázal $ES(k) \leq R_3(k, k)$.
- Erdős a Szekeres ukázali $2^{k-2} + 1 \leq ES(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1$.

Erdősova–Szekeresova domněnka, 1935, 500$

Pro každé $k \geq 2$ platí $ES(k) = 2^{k-2} + 1$.

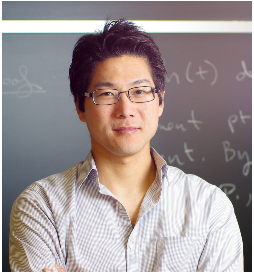
Erdősova–Szekeresova domněnka

- Ukázali jsme si, že $ES(k) \leq R_4(k,5)$.
- Michael Tarsy u zkoušky dokázal $ES(k) \leq R_3(k,k)$.
- Erdős a Szekeres ukázali $2^{k-2}+1 \leq ES(k) \leq \binom{2k-4}{k-2}+1$.

Erdősova–Szekeresova domněnka, 1935, 500\$

Pro každé $k \geq 2$ platí $ES(k) = 2^{k-2}+1$.

- Platí pro $k \leq 6$. Nejlepší známý odhad $ES(k) \leq 2^{k+o(k)}$ (Suk, 2016).



Obrázek: Andrew Suk.

Zdroj: http://math.ucsd.edu

Zdroj: „The Boy Who Loved Math: The Improbable Life of Paul Erdős" (Heiligman)

Zdroj: „The Boy Who Loved Math: The Improbable Life of Paul Erdős" (Heiligman)

Děkuji za pozornost.