Kombinatorika a grafy 1

Martin Balko

1. přednáška

5. října 2021

Základní informace

Základní informace

- úvodní kurs, kde jsou probrány základy kombinatoriky a teorie grafů („pokračování diskrétní matematiky“).

Základní informace

- úvodní kurs, kde jsou probrány základy kombinatoriky a teorie grafů („pokračování diskrétní matematiky“).
- Stránky přednášky: *kam.mff.cuni.cz/~balko/kg12122*
  - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...

Základní informace

- úvodní kurs, kde jsou probrány základy kombinatoriky a teorie grafů („pokračování diskrétní matematiky“).
- Stránky přednášky: *kam.mff.cuni.cz/˜balko/kg12122*
  - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...
- Cvičení:
  - středa 15:40, S6 (Marian Poljak),
  - středa 17:20, S6 (Peter Zeman),
  - středa 12:20, S11 (Jakub Pekárek),
  - středa 14:00, S10 (Irena Penev),
  - čtvrtek 9:00, S10 (Matej Lieskovský),
  - čtvrtek 10:40, S6 (Filip Čermák),
  - pátek 10:40, S10 (Jakub Pekárek).

Základní informace

- úvodní kurs, kde jsou probrány základy kombinatoriky a teorie grafů („pokračování diskrétní matematiky“).
- Stránky přednášky: *kam.mff.cuni.cz/˜balko/kg12122*
  - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...
- Cvičení:
  - středa 15:40, S6 (Marian Poljak),
  - středa 17:20, S6 (Peter Zeman),
  - středa 12:20, S11 (Jakub Pekárek),
  - středa 14:00, S10 (Irena Penev),
  - čtvrtek 9:00, S10 (Matej Lieskovský),
  - čtvrtek 10:40, S6 (Filip Čermák),
  - pátek 10:40, S10 (Jakub Pekárek).
- Doporučená literatura:
  - J. Matoušek a J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky.
  - J. Matoušek a T. Valla: Kombinatorika a grafy I.
  - T. Kaiser: Přednáška „Samoopravné kódy“.

Sylabus

Sylabus

- Předběžný plán:

Sylabus

- Předběžný plán:
  - odhady faktoriálu a binomických koeficientů,
  - vytvořující funkce a jejich aplikace,
  - konečné projektivní roviny a latinské čtverce,
  - toky v sítích (minimaxová věta),
  - Hallova věta a její aplikace,
  - Ušaté lemma, struktura 2-souvislých grafů,
  - počet koster úplného grafu,
  - dvojí počítání (počet koster $K_n - e$, Spernerova věta),
  - základní Ramseyovy věty,
  - samoopravné kódy.

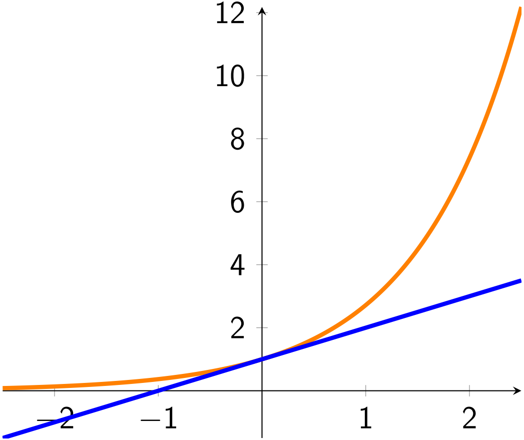
Sylabus

- Předběžný plán:
  - odhady faktoriálu a binomických koeficientů,
  - vytvořující funkce a jejich aplikace,
  - konečné projektivní roviny a latinské čtverce,
  - toky v sítích (minimaxová věta),
  - Hallova věta a její aplikace,
  - Ušaté lemma, struktura 2-souvislých grafů,
  - počet koster úplného grafu,
  - dvojí počítání (počet koster $K_n - e$, Spernerova věta),
  - základní Ramseyovy věty,
  - samoopravné kódy.
- „Průchod kombinatorikou do šířky“, rozšiřující témata na přednáškách KAM a IÚUK.

Odhady faktoriálu

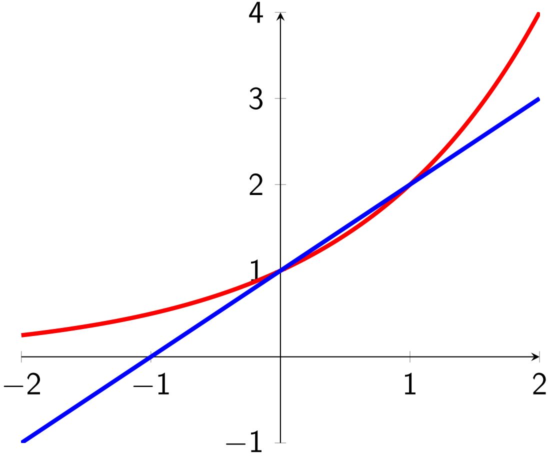
$$1 + x \leq e^x$$

$1 + x \leq e^x$



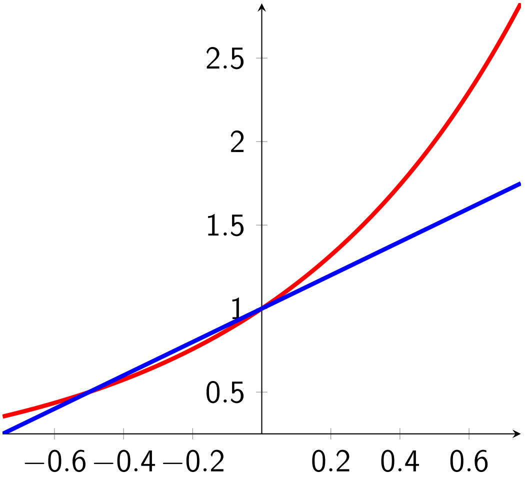
Obrázek: Funkce e^x a $1 + x$.

$1 + x \leq e^x$



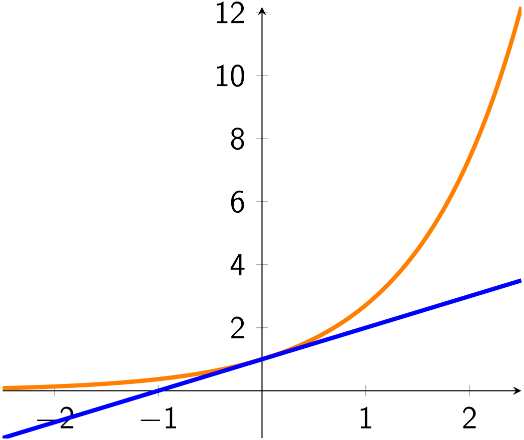
Obrázek: Funkce 2^x a $1 + x$.

$1 + x \leq e^x$



Obrázek: Funkce 4^x a $1 + x$.

$1 + x \leq e^x$

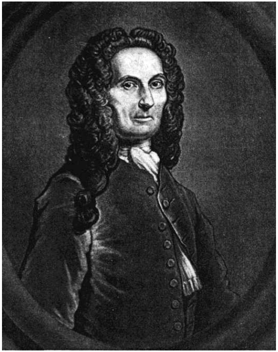


Obrázek: Funkce e^x a $1 + x$.

Stirlingův vzorec

Stirlingův vzorec

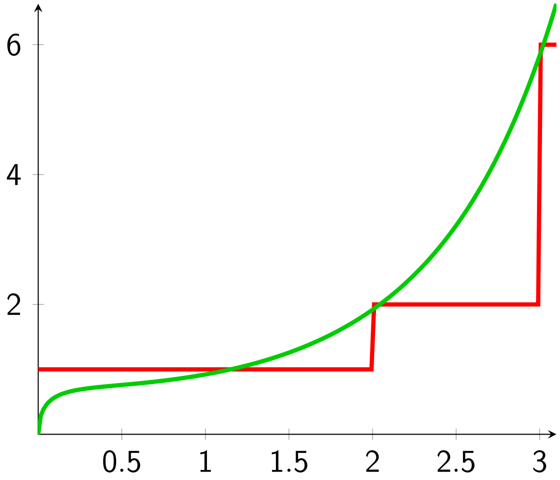
- $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$



Obrázek: James Stirling (1692–1770) a Abraham de Moivre (1667–1754).

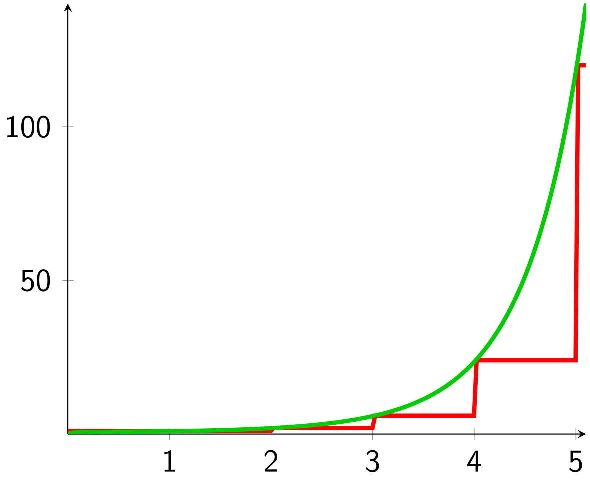
Zdroje: http://hemarino18.wixsite.com/jamesstirling a https://cs.wikipedia.org

Stirlingův vzorec



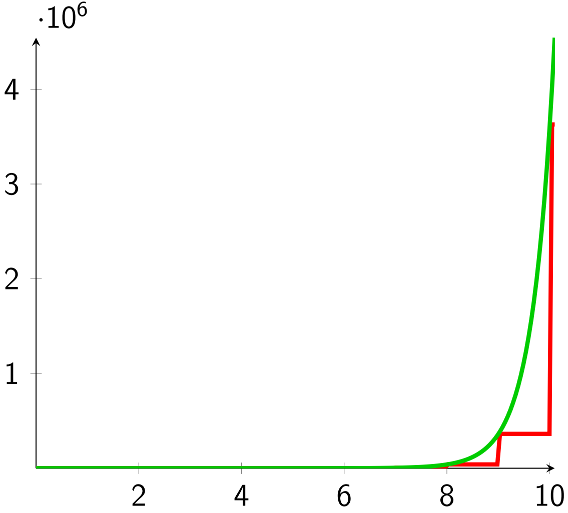
Obrázek: Funkce $\lfloor x \rfloor!$ a $\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$.

Stirlingův vzorec



Obrázek: Funkce $\lfloor x \rfloor !$ a $\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$.

Stirlingův vzorec



Obrázek: Funkce $\lfloor x \rfloor!$ a $\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$.

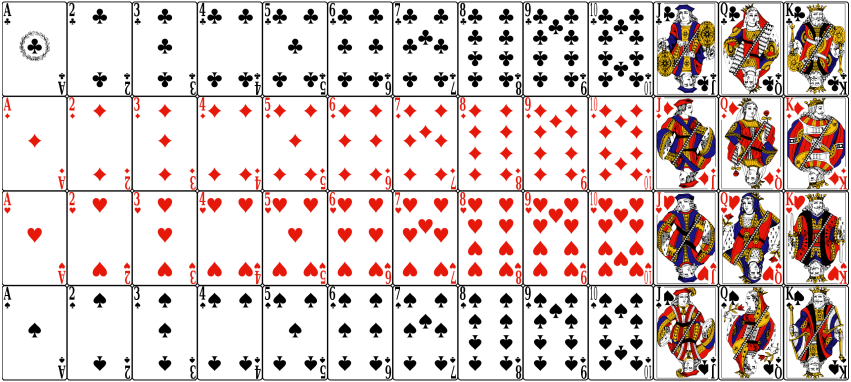
Velikost čísla 52!

Velikost čísla 52!

- $52! =$ počet možných zamíchání kanastových karet

Velikost čísla 52!

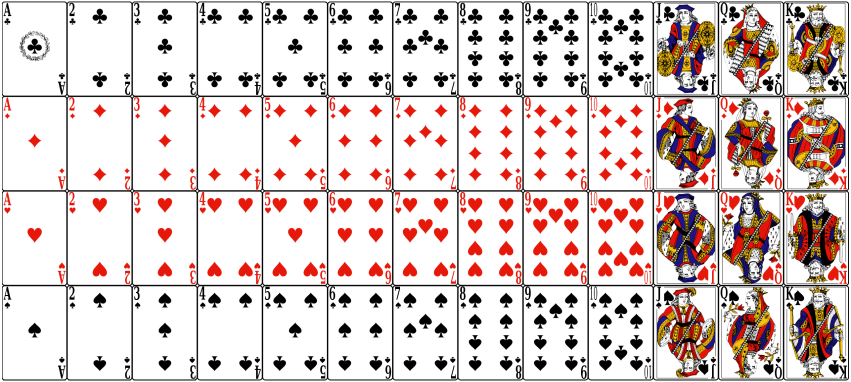
- 52! = počet možných zamíchání kanastových karet



Zdroj: https://cs.wikipedia.org

Velikost čísla 52!

- 52! = počet možných zamíchání kanastových karet



Zdroj: https://cs.wikipedia.org

- Jak velké je toto číslo?
  - https://czep.net/weblog/52cards.html

Velikost čísla 52!

- $52! = 80\ 658\ 175\ 170\ 943\ 878\ 571\ 660\ 636\ 856\ 403\ 766\ 975\ 289\ 505\ 440\ 883\ 277\ 824\ 000\ 000\ 000\ 000 \approx 10^{67}$

Velikost čísla 52!

- $52^{52} = 170\,676\,555\,274\,132\,171\,974\,277\,914\,691\,501\,574\,771\,358\,362\,295\,975\,962\,674\,353\,045\,737\,940\,041\,855\,191\,232\,907\,575\,296 \approx 10^{89}$

- $52! = 80\,658\,175\,170\,943\,878\,571\,660\,636\,856\,403\,766\,975\,289\,505\,440\,883\,277\,824\,000\,000\,000\,000 \approx 10^{67}$

Velikost čísla 52!

- $52^{52} = 170\ 676\ 555\ 274\ 132\ 171\ 974\ 277\ 914\ 691\ 501\ 574\ 771\ 358\ 362\ 295\ 975\ 962\ 674\ 353\ 045\ 737\ 940\ 041\ 855\ 191\ 232\ 907\ 575\ 296 \approx 10^{89}$

- $52! = 80\ 658\ 175\ 170\ 943\ 878\ 571\ 660\ 636\ 856\ 403\ 766\ 975\ 289\ 505\ 440\ 883\ 277\ 824\ 000\ 000\ 000\ 000 \approx 10^{67}$

- $52^{26} = 413\ 130\ 191\ 675\ 859\ 211\ 796\ 859\ 746\ 472\ 546\ 052\ 775\ 870\ 464 \approx 10^{44}$

Velikost čísla 52!

- 52^{52} = 170 676 555 274 132 171 974 277 914 691 501 574 771 358 362 295 975 962 674 353 045 737 940 041 855 191 232 907 575 296 $\approx 10^{89}$
- $52e\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq$ 629 736 165 788 788 226 963 798 462 179 958 085 486 745 268 375 626 089 182 872 704 797 360 $\approx 10^{68}$

- $52!$ = 80 658 175 170 943 878 571 660 636 856 403 766 975 289 505 440 883 277 824 000 000 000 000 $\approx 10^{67}$

- 52^{26} = 413 130 191 675 859 211 796 859 746 472 546 052 775 870 464 $\approx 10^{44}$

Velikost čísla 52!

- $52^{52} = 170\ 676\ 555\ 274\ 132\ 171\ 974\ 277\ 914\ 691\ 501\ 574\ 771\ 358\ 362\ 295\ 975\ 962\ 674\ 353\ 045\ 737\ 940\ 041\ 855\ 191\ 232\ 907\ 575\ 296 \approx 10^{89}$
- $52e\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 629\ 736\ 165\ 788\ 788\ 226\ 963\ 798\ 462\ 179\ 958\ 085\ 486\ 745\ 268\ 375\ 626\ 089\ 182\ 872\ 704\ 797\ 360 \approx 10^{68}$

- $52! = 80\ 658\ 175\ 170\ 943\ 878\ 571\ 660\ 636\ 856\ 403\ 766\ 975\ 289\ 505\ 440\ 883\ 277\ 824\ 000\ 000\ 000\ 000 \approx 10^{67}$

- $e\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 12\ 110\ 310\ 880\ 553\ 619\ 749\ 303\ 816\ 580\ 383\ 809\ 336\ 283\ 562\ 853\ 377\ 424\ 791\ 978\ 321\ 246\ 103 \approx 10^{67}$
- $52^{26} = 413\ 130\ 191\ 675\ 859\ 211\ 796\ 859\ 746\ 472\ 546\ 052\ 775\ 870\ 464 \approx 10^{44}$

Velikost čísla 52!

- $52^{52} = 170\ 676\ 555\ 274\ 132\ 171\ 974\ 277\ 914\ 691\ 501\ 574\ 771\ 358\ 362\ 295\ 975\ 962\ 674\ 353\ 045\ 737\ 940\ 041\ 855\ 191\ 232\ 907\ 575\ 296 \approx 10^{89}$
- $52e\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 629\ 736\ 165\ 788\ 788\ 226\ 963\ 798\ 462\ 179\ 958\ 085\ 486\ 745\ 268\ 375\ 626\ 089\ 182\ 872\ 704\ 797\ 360 \approx 10^{68}$

- $52! = 80\ 658\ 175\ 170\ 943\ 878\ 571\ 660\ 636\ 856\ 403\ 766\ 975\ 289\ 505\ 440\ 883\ 277\ 824\ 000\ 000\ 000\ 000 \approx 10^{67}$

- $\sqrt{104\pi}\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 80\ 529\ 020\ 383\ 886\ 612\ 857\ 810\ 199\ 580\ 012\ 764\ 961\ 409\ 004\ 334\ 781\ 435\ 987\ 268\ 084\ 328\ 737 \approx 10^{67}$
- $e\left(\frac{52}{e}\right)^{52} \doteq 12\ 110\ 310\ 880\ 553\ 619\ 749\ 303\ 816\ 580\ 383\ 809\ 336\ 283\ 562\ 853\ 377\ 424\ 791\ 978\ 321\ 246\ 103 \approx 10^{67}$
- $52^{26} = 413\ 130\ 191\ 675\ 859\ 211\ 796\ 859\ 746\ 472\ 546\ 052\ 775\ 870\ 464 \approx 10^{44}$

Odhady binomických koeficientů

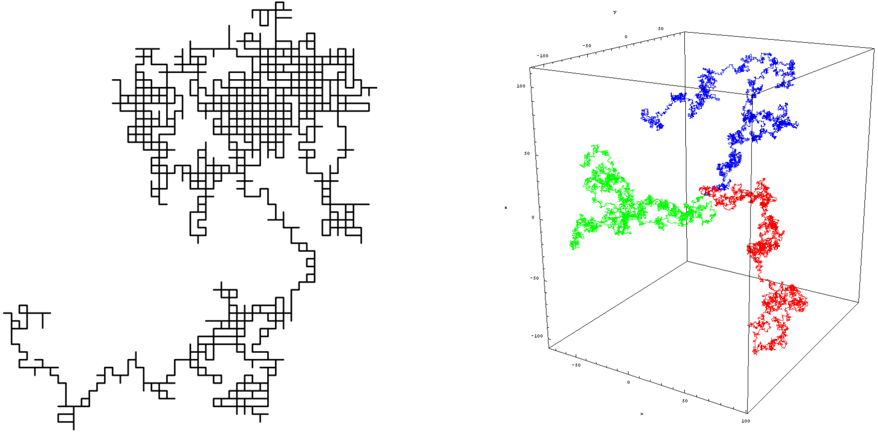
Náhodné procházky

Náhodné procházky

- Náhodné procházky lze uvážit i ve vícedimenzionálních mřížkách.

Náhodné procházky

- Náhodné procházky lze uvážit i ve vícedimenzionálních mřížkách.

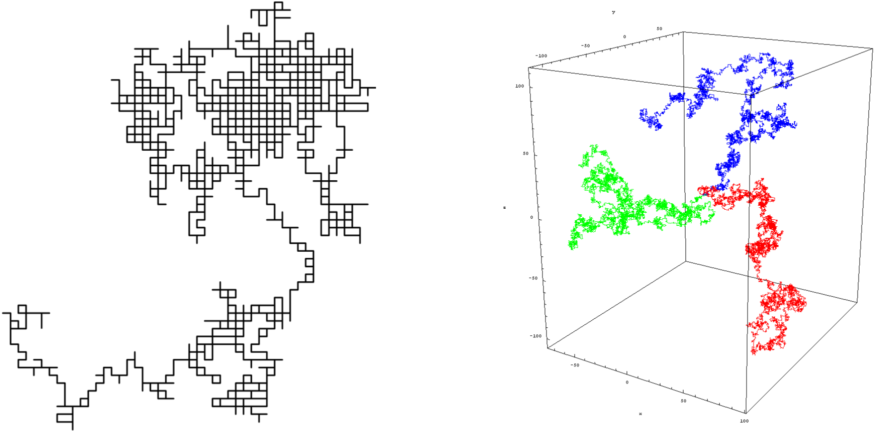


Obrázek: Náhodné procházky v $\mathbb{Z}^2$ a $\mathbb{Z}^3$.

Zdroj: https://cs.wikipedia.org

Náhodné procházky

- Náhodné procházky lze uvážit i ve vícedimenzionálních mřížkách.



Obrázek: Náhodné procházky v $\mathbb{Z}^2$ a $\mathbb{Z}^3$.

Zdroj: https://cs.wikipedia.org

- V $\mathbb{Z}^2$ střední hodnota počtu návratů roste do nekonečna, ale v $\mathbb{Z}^3$ už ne.

„A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever."

Shizuo Kakutani

„*A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever.*“

Shizuo Kakutani

Děkuji za pozornost.