

# Diskrétní matematika – příklady na 5. cvičení\*

## 1 Kombinatorické počítání

Počet možných uspořádání  $n$ -prvkové množiny je  $n!$ . Počet způsobů, kolika můžeme vybrat neuspořádanou  $k$ -tici z  $n$ -prvkové množiny, je  $\binom{n}{k}$ . Platí  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  a  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ . Pro zjednodušení si zavedeme značení  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Příklad 1.** Jaký je počet všech zobrazení  $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ? Co počet bijektivních zobrazení  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  a prostých zobrazení  $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ?

**Příklad 2.** Z kolika hesel máme na výběr, pokud každé heslo může obsahovat pouze písmena z anglické abecedy a musí mít délku 8? Co když navíc může obsahovat jen právě jednu samohlásku?

**Příklad 3.** (a) Pro přirozené číslo  $n$  dokažte algebraicky i kombinatoricky následující identitu:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

(b) Pro nezáporná celá čísla  $a, b, c, m$  dokažte následující identitu:

$$\sum_{i,j,k \geq 0, i+j+k=m} \binom{a}{i} \cdot \binom{b}{j} \cdot \binom{c}{k} = \binom{a+b+c}{m}.$$

**Příklad 4.** Dokažte kombinatoricky následující identitu:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

**Příklad 5.** (a) Kolika způsoby můžeme rozdat  $n$  korun mezi  $k$  lidí tak, aby každý dostal alespoň jednu korunu? Neboli, jaký je počet řešení  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$  rovnice  $i_1 + \dots + i_k = n$ ?

(b) Jak se počet změní v případě, že netrváme na tom, aby každý něco dostal? Neboli, jaký je počet řešení  $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_0^k$  rovnice  $i_1 + \dots + i_k = n$ ?

**Příklad 6.** Dokažte následující identitu:

$$\sum_{i=d}^n \binom{n}{i} \binom{i}{d} = 2^{n-d} \binom{n}{n-d}.$$

**Příklad 7 (\*).** Kolik existuje  $k$ -prvkových podmnožin množiny  $[n]$ , v nichž se nevyskytují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>