

Diskrétní matematika – příklady na 4. cvičení*

1 Funkce

Zobrazení (respektive *funkce*) $f: X \rightarrow Y$ je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$, které je v relaci f s x . Funkce $f: X \rightarrow Y$ je

- (a) *prostá* (neboli *injektivní*), pokud $f(x) \neq f(x')$ pro každé $x \neq x'$, $x, x' \in X$;
- (b) *na* (neboli *surjektivní*), pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$;
- (c) *vzájemně jednoznačná* (neboli *bijektivní*), pokud je prostá a na.

Jsou-li $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ funkce, pak jejich *složení* označujeme jako $g \circ f$ a jedná se o funkci $h: X \rightarrow Z$ danou předpisem $x \mapsto g(f(x))$. Všimněte si, že skládání je značené jinak než u relací!

Příklad 1. *Nechť $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ jsou zobrazení. Nechť $g \circ f$ je prosté.*

- (a) *Rozhodněte, zda f musí být prosté.*
- (b) *Rozhodněte, zda g musí být prosté.*

Příklad 2. *Najděte příklad*

- (a) *prosté funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která není na,*
- (b) *funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která je na, ale není prostá.*

2 Částečná uspořádání

Relace $\preceq$ na X se nazývá (*částečné*) *uspořádání*, jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní. Pár $(X, \preceq)$ se nazývá *částečně uspořádaná množina*.

Máme-li nějaké částečné uspořádání $\preceq$, tak můžeme definovat odvozenou relaci *ostré nerovnosti* $\prec$ takto: $a \prec b$ právě tehdy, když $a \preceq b$ a $a \neq b$. Také lze definovat *obrácenou nerovnost*, tedy relaci $\succeq$, vztahem $a \succeq b \Leftrightarrow b \preceq a$.

Hasseův diagram je znázornění částečně uspořádané množiny $(X, \preceq)$, kde každý prvek množiny X tvoří bod (vrchol). Dva vrcholy x a y se spojí čarou (hranou) vedenou zdola nahoru od x k y , jestliže $x \prec y$ a neexistuje $z \in X$ takové, že $x \prec z \prec y$.

Částečné uspořádání $\preceq$ na X je *lineární*, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Prvek $a \in X$ nazýváme *minimálním prvkem* $(X, \preceq)$, pokud neexistuje žádné $x \in X$ takové, že $x \prec a$. *Maximální prvek* a je definován podobně (neexistuje žádné $x \succ a$).

Prvek $a \in X$ nazýváme *nejmenším prvkem* $(X, \preceq)$, jestliže pro každé $x \in X$ platí $a \preceq x$. Podobně definujeme *největší prvek* ($x \preceq a$ pro každé $x \in X$).

Příklad 3. *Uvažme relaci $\preceq$ na množině $\mathbb{R}^3$ definovanou předpisem*

$$(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow (a_1 \geq a_2 \ \& \ b_1 \geq b_2 \ \& \ c_1 \leq c_2).$$

Jedná se o částečné uspořádání?

Příklad 4. (a) *Ukažte, že největší prvek je maximální, a ukažte příklad uspořádané množiny, která má maximální prvek, ale nemá největší prvek.*

(b) *Uvažme uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, \preceq)$, kde $x \preceq y \Leftrightarrow y \mid x$ (tj. x je dělitelné prvkem y). Rozhodněte, zda má nejmenší prvek. Má minimální? Maximální? Největší?*

Příklad 5. *Dokažte, že nejmenší prvek, pokud existuje, je určen jednoznačně.*

Příklad 6. *Dokažte, že pro lineárně uspořádané množiny je každý minimální prvek rovněž nejmenší.*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 7. (a) Necht' $\preceq_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, jsou uspořádání na nějaké množině X . Ukažte, že $\bigcap_{i=1}^k \preceq_i$ je opět uspořádání. (Uvědomte si, že každé $\preceq_i$, jakožto relace, je podmnožinou $X \times X$.)

(b) (*) Dokažte, že libovolné částečné uspořádání $\leq$ na konečné množině X se dá vyjádřit jako průnik lineárních uspořádání.

Hint: Pro částečně uspořádanou množinu $(X, \leq)$ a neporovnatelné prvky $a, b \in X$ v relaci $\leq$, uvažte relaci $\preceq_{a,b} = \preceq$ na X , kde $x \preceq y$ právě tehdy, když $x \leq y \vee (x \leq a \ \& \ b \leq y)$.