

Diskrétní matematika – příklady na 3. cvičení*

1 Relace

(Binární) *relace* R je množina uspořádaných párů. Neboli $R \subseteq X \times Y$, kde X a Y jsou nějaké množiny. Je-li $X = Y$, tak mluvíme o *relaci na* X . Fakt, že prvky $x \in X$ a $y \in Y$ jsou v relaci R , zapisujeme $(x, y) \in R$ nebo xRy . Jsou-li X, Y, Z množiny a $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ jsou relace, pak *složení relací* $R \circ S$ značí relaci $T \subseteq X \times Z$, kde pro $x \in X$ a $z \in Z$ platí xTz právě tehdy, když existuje $y \in Y$ takové, že xRy a ySz . *Inverzní relací* R^{-1} k relaci $R \subseteq X \times Y$ rozumíme $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$. Relace $R \subseteq X \times X$ je

- (a) *reflexivní*, pokud xRx pro každé $x \in X$;
- (b) *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx pro každé $x, y \in X$;
- (c) *(slabě) antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$ pro každé $x, y \in X$;
- (d) *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz pro každé $x, y, z \in X$;
- (e) *asymetrická* (či *(silně) antisymetrická*), pokud xRy implikuje $\neg(yRx)$ pro každé $x, y \in X$.

Jako *ekvivalenci* označujeme relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad 1. Nechť R a S jsou ekvivalence na množině X . Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence:

- (a) $R \cap S$
- (b) $R \cup S$
- (c) $R \setminus S$
- (d) $R \circ S$

Příklad 2. Kolik je na n -prvkové množině X relací? Kolik z nich je reflexivních? Kolik symetrických? Kolik relací je zároveň reflexivních a zároveň symetrických?

Příklad 3. Dokažte, že relace R na množině X je tranzitivní právě tehdy, když $R \circ R \subseteq R$.

Příklad 4. (a) Kolik existuje ekvivalencí na čtyřprvkové množině?

(b) (*) Napadne vás vzoreček pro počet ekvivalencí na n -prvkové množině?

Příklad 5. Mějme R a S tranzitivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také tranzitivní?

- (a) $R \cup S$,
- (b) $R \cap S$,
- (c) $R \setminus S$.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>