

Diskrétní matematika – příklady na 2. cvičení*

1 Matematická indukce

Typ důkazu, kde pro důkaz tvrzení $A(n)$ pro každé přirozené číslo n ukážeme, že “jestliže platí $A(m)$ pro všechna $m < n$, pak platí $A(n)$ ”. *Základ indukce*: ověříme, že platí pro nejmenší možný případ $n = 1$. *Indukční krok*: dokážeme, že pokud tvrzení platí pro n , platí i pro $n + 1$.

Příklad 1. *Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Příklad 2. *Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.*

Příklad 3. *Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.*

Příklad 4. *Uvažme Fibonacciho posloupnost $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, což je posloupnost splňující rekurentní podmínky $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$. Ukažte, že platí*

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

Příklad 5. *Mějme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, na které chybí jedno rohové políčko. Ukažte, že je možné ji celou vydláždit dlaždicemi následujícího tvaru:*



Příklad 6. *Mějme n přímek v obecné poloze v rovině (tj. žádné tři se neprotínají v jednom bodě a žádné dvě nejsou rovnoběžné). Ukažte, že rovina je těmito přímkami rozdělena na $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ částí.*

Příklad 7. *Najděte chybu ve zmíněném důkazu tvrzení: Nechť $p_1, \dots, p_n$ je $n \geq 2$ různých přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Potom všechny tyto přímky mají společný bod.*

Důkaz. Postupujeme indukcí. Pro $n = 2$ tvrzení platí. Nechť platí pro n a mějme $n + 1$ přímek $p_1, \dots, p_{n+1}$. Z indukčního předpokladu mají přímky $p_1, p_2, \dots, p_n$ společný bod x . Podobně přímky $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_{n+1}$ mají společný bod y . Přímka p_1 leží v obou skupinách, proto obsahuje jak x , tak y . Totéž platí pro p_{n-1} . Poněvadž p_1 a p_{n-1} jsou různoběžné a protínají se tedy jen v jednom bodě, platí $x = y$. Takže všechny přímky $p_1, \dots, p_{n+1}$ mají společný bod. $\square$

Příklad 8 (*). *Na ostrově žije 1000 domorodců, z nichž 900 má hnědé a 100 modré oči. Každý domorodec vidí barvu očí všech ostatních, ale nezná tu svoji. Jejich náboženství jim zakazuje se o barvě očí bavit a dozví-li se nějaký domorodec, že má modré oči, pak se musí následující den zabít. Jednoho dne kmen navštívil cestovatel neznalý místních zvyklostí, který při svém odjezdu neopatrně prohlásil: „To jsem rád, že vidím osobu s modrýma očima.“. Jaký vliv bude mít tato poznámka na domorodce?*

- (a) *Nestane se nic, protože cestovatel nepřinesl žádnou novou informaci. Každý člověk z kmene již před jeho návštěvou věděl, že někteří z místních mají modré oči.*
- (b) *Po 100 dnech všichni modroocí domorodci spáchají sebevraždu. To proto, že daná situace je speciální případ následující věty, která se dá dokázat matematickou indukcí.*

Věta. *Nechť v kmeni žije $n \in \mathbb{N}$ domorodců s modrýma očima. Potom po n dnech od cestovatelova odjezdu všech n domorodců s modrýma očima spáchá sebevraždu.*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Důkaz. Postupujeme indukcí podle n . Pro $n = 1$ si osamocený modrooký domorodec uvědomí, že cestovatel mluvil o něm a zabije se další den. Nyní uvažme $n > 1$. Každý modrooký domorodec bude uvažovat následovně: „Pokud nemám modré oči, pak je na ostrově jen $n - 1$ osob s modrými očima a ti podle indukce spáchají sebevraždu po $n - 1$ dnech od cestovatelova odjezdu.“ Ale po $n - 1$ dnech nikdo sebevraždu nespáchá, protože nikdo z nich do té doby nemá jak zjistit, že je sám modrooký. Pod $n - 1$ dnech si tak každý z modrookých domorodců uvědomí, že sám musí mít modré oči a n -tý den spáchá sebevraždu. $\square$