

Diskrétní matematika – příklady na 1. cvičení*

29. září 2025

Definice a značení

- kvantifikátory: obecný $\forall$, existenční $\exists$
- logické spojky: $\wedge$ "a zároveň", $\vee$ "nebo", $\Rightarrow$ "implikuje", $\Leftrightarrow$ "právě tehdy, když"
- množiny čísel: reálná $\mathbb{R}$, racionální $\mathbb{Q}$, celá $\mathbb{Z}$, přirozená $\mathbb{N}$
- množina daná: výčtem prvků $\{1, 2, 3\}$, vlastností prvků $\{k \in \mathbb{N} : k \leq 3\}$

1 Výroky

Příklad 1. Doplňte tabulku pravdivostních hodnot.

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$\neg b \Rightarrow \neg a$	$a \Leftrightarrow b$	$\neg a \vee b$	$a \wedge \neg b$
0	0								
0	1								
1	0								
1	1								

Příklad 2. Nechť M je množina osob přítomných v posluchárně a necht' $W(x, y)$ znamená: osoba x zná příjmení osoby y . Zkoumejte platnost výroků

- (a) $\forall x \in M \exists y \in M : W(x, y)$
- (b) $\forall y \in M \exists x \in M : W(x, y)$
- (c) $\exists x \in M \forall y \in M : W(x, y)$
- (d) $\exists y \in M \forall x \in M : W(x, y)$

Příklad 3. Znegujte a rozhodněte, zda platí původní výrok nebo jeho negace

- (a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 > 0$,
- (b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n$,
- (c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : (x \geq n) \wedge (x < n + 1)$.

Příklad 4. Zapište jako výrok

- (a) Všechna přirozená čísla jsou sudá.
- (b) Každé prvočíslo je liché.

Příklad 5. Platí výrok

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} : (z > y \Rightarrow z > x)) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} : (z > y \wedge z \leq x))?$$

2 Množiny

Příklad 6. Zapište následující množiny množinovým zápisem

- (a) A = množina mocnin čísla 2 (s nezáporným celočíselným exponentem),
- (b) B = množina všech celočíselných dělitelů čísla $n \in \mathbb{Z}$,
- (c) C = množina celých čísel, která jsou druhou mocninou celého lichého čísla,
- (d) D = množina přirozených čísel, která mají právě tři přirozené dělitele,
- (e) E = množina prvočísel (tj. množina přirozených čísel, která mají právě dva přirozené dělitele).

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

3 Důkazy

Důkaz je demonstrace platné pravdivosti tvrzení za určitých předpokladů (axiomů).

3.1 Přímý důkaz

Přímý důkaz je posloupnost pravdivých implikací od pravdivého výroku k výroku, který chceme dokázat. Formálně $A \Rightarrow B$ dokážeme přes $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \cdots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \wedge (A_n \Rightarrow B)$.

Příklad 7. *Dokažte, že pokud n a m jsou lichá, $n + m$ je sudé.*

Příklad 8. *Dokažte, že pro každá dvě reálná nezáporná x, y platí $x^2 + y^2 \geq 2xy$.*

3.2 Nepřímý důkaz

Princip nepřímého důkazu spočívá v tom, že místo původní implikace $A \Rightarrow B$ dokážeme přímo její obměněnou implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$ a tím dokážeme tu původní. Využíváme, že obměněná implikace má stejnou pravdivostní hodnotu, jako původní implikace.

Příklad 9. *Dokažte $\forall (n \in \mathbb{N}) : 2|n^2 \Rightarrow 2|n$.*

Příklad 10. *Dokažte $\forall (n \in \mathbb{N}) : 5|(n^2 + 1) \Rightarrow 5 \nmid n$.*

3.3 Důkaz sporem

Pokusíme se dokázat negaci věty, konkrétně dokážeme, že tato negace je nepravdivá, z čehož plyne, že původní věta je pravdivá. Budeme předpokládat, že tato negace platí, a odvodíme z ní spor, neboli tvrzení, které je buď v rozporu s tímto předpokladem, nebo je evidentně nepravdivé. K důkazu tvrzení B , budeme předpokládat, že platí jeho negace $\neg B$ a odvodíme řetězec pravdivých implikací: $\neg B \Rightarrow C \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$ nebo $\neg B \Rightarrow C \Rightarrow \cdots \Rightarrow A$, kde A je nepravdivý výrok.

Příklad 11. *Dokažte, že pro všechna přirozená čísla a, b platí $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.*

Příklad 12. *Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.*