

# Diskrétní matematika — příklady na 8. cvičení

30. listopadu 2023

## 1 Úvod do teorie grafů

(Neorientovaný) graf  $G$  je uspořádaná dvojice  $(V, E)$ , kde  $V$  je neprázdná množina vrcholů a  $E \subseteq \binom{V}{2}$  je množina hran. Důležitými grafy jsou například

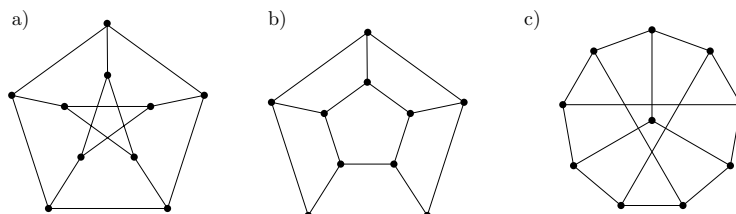
- úplný graf na  $n$  vrcholech  $K_n = (V, \binom{V}{2})$ ,  $|V| = n$ ,
- cyklus  $C_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\}: i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\})$ ,
- cesta  $P_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\}: i = 1, \dots, n-1\})$ ,
- úplný bipartitní graf  $K_{m,n}$ , kde  $m, n \geq 1$ ,  $V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$  a  $E = \{\{u_i, v_j\}: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ .

Graf  $H$  je podgrafem grafu  $G$ , pokud  $V(H) \subseteq V(G)$  a  $E(H) \subseteq E(G)$ . Stupeň vrcholu  $v$  je počet hran grafu  $G$  obsahujících vrchol  $v$ , značíme jej  $\deg_G(v)$ . Graf  $G$  je souvislý, pokud v něm pro každé jeho dva vrcholy  $u, v$  existuje cesta z  $u$  do  $v$ . Řekneme, že grafy  $G = (V, E)$  a  $G' = (V', E')$  jsou izomorfní, pokud existuje bijekce  $f: V \rightarrow V'$  taková, že platí  $\{u, v\} \in E$  právě tehdy, když  $\{f(u), f(v)\} \in E'$ . Jako doplněk grafu  $G$  značíme graf  $\overline{G}$ , který má hrany právě mezi těmi vrcholy, mezi kterými je  $G$  nemá.

**Příklad 1.** Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož vrcholy by měly všechny stupně různé?

**Příklad 2.** Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?

**Příklad 3.** Které z následujících grafů jsou izomorfní?



**Příklad 4.** Nechť máme  $m, n, k \in \mathbb{N}$ .

(a) Spočítejte počet cyklů délky  $k$  v grafu  $K_n$ .

(b) Spočítejte počet cyklů délky  $k$  v grafu  $K_{m,n}$ .

**Příklad 5.** Ukažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň alespoň  $d$ , obsahuje cestu na  $d+1$  vrcholech jako podgraf.

**Příklad 6.** Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.