

# Diskrétní matematika — příklady na 6. cvičení

16. listopadu 2023

## 1 Princip inkluze a exkluze

**Věta 1** (Princip inkluze a exkluze). *Pro každý soubor konečných množin  $A_1, A_2, \dots, A_n$  platí*

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\dots,n\}}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

**Příklad 1.** *Ve třídě je 30 žáků, z nichž 12 má rádo matematiku, 14 fyziku a 13 chemii. Také víme, že 5 má rádo matematiku i fyziku, 7 fyziku i chemii a 4 žáci mají rádi matematiku i chemii. Tři žáci mají rádi všechny tři předměty. Kolik žáků nemá rádo ani jeden předmět?*

**Příklad 2.** *Kolik čísel z množiny  $\{1, 2, \dots, 1000\}$  je dělitelných 7, 10 nebo 15?*

**Příklad 3.** *Nechť  $m, n$  jsou přirozená čísla taková, že platí  $m \geq n$ . Jaký je počet surjektivních zobrazení typu  $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ?*

**Příklad 4.** *Kolik existuje pořadí písmen  $A, B, D, E, I, K, M, N, R, U, Z$  takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov  $BAR, DEN, RAZIE$ ?*

**Příklad 5** (\*). *Bud'*

$$\varphi(n) = |\{m \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \gcd(n, m) = 1\}|$$

*Eulerova funkce. Pomocí principu inkluze a exkluze ukažte, že pro každé přirozené číslo  $n \geq 2$  platí*

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

*kde  $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$  pro přirozená čísla  $r, e_1, \dots, e_r$  a prvočísla  $p_1, \dots, p_r$  je prvočíselný rozklad  $n$ .*