

Diskrétní matematika — 4. cvičení*

26. října 2023

1 Částečná uspořádání

Relace \preceq na X se nazývá (částečné) *uspořádání*, jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní. Pár (X, \preceq) se nazývá *částečně uspořádaná množina*.

Máme-li nějaké částečné uspořádání \preceq , tak můžeme definovat odvozenou relaci *ostré nerovnosti* \prec takto: $a \prec b$ právě tehdy, když $a \preceq b$ a $a \neq b$. Také lze definovat *obrácenou nerovnost*, tedy relaci \succeq , vztahem $a \succeq b \Leftrightarrow b \preceq a$.

Hasseův diagram je znázornění částečně uspořádané množiny (X, \preceq) , kde každý prvek množiny X tvoří bod (vrchol). Dva vrcholy x a y se spojí čarou (hranou) vedenou zdola nahoru od x k y , jestliže $x \prec y$ a neexistuje $z \in X$ takové, že $x \prec z \prec y$.

Částečné uspořádání \preceq na X je *lineární*, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Prvek $a \in X$ nazýváme *minimálním prvkem* (X, \preceq) , pokud neexistuje žádné $x \in X$ takové, že $x \prec a$. *Maximální prvek* a je definován podobně (neexistuje žádné $x \succ a$).

Prvek $a \in X$ nazýváme *nejmenším prvkem* (X, \preceq) , jestliže pro každé $x \in X$ platí $a \preceq x$. Podobně definujeme *největší prvek* ($x \preceq a$ pro každé $x \in X$).

Příklad 1. Uvažme relaci \preceq na množině \mathbb{R}^3 definovanou předpisem

$$(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow (a_1 \geq a_2 \ \& \ b_1 \geq b_2 \ \& \ c_1 \leq c_2).$$

Jedná se o částečné uspořádání?

Příklad 2. (a) Ukažte, že největší prvek je maximální, a ukažte příklad uspořádané množiny, která má maximální prvek, ale nemá největší prvek.

(b) Uvažme uspořádanou množinu (\mathbb{N}, \preceq) , kde $x \preceq y \Leftrightarrow y \mid x$ (tj. x je dělitelné prvkem y). Rozhodněte, zda má nejmenší prvek. Má minimální? Maximální? Největší?

Příklad 3. Dokažte, že nejmenší prvek, pokud existuje, je určen jednoznačně.

Příklad 4. Dokažte, že pro lineárně uspořádané množiny je každý minimální prvek rovněž nejmenší.

Příklad 5. (a) Necht' \preceq_i , $i = 1, 2, \dots, k$, jsou uspořádání na nějaké množině X . Ukažte, že $\bigcap_{i=1}^k \preceq_i$ je opět uspořádání. (Uvědomte si, že každé \preceq_i , jakožto relace, je podmnožinou $X \times X$.)

(b) (*) Dokažte, že libovolné částečné uspořádání \preceq na konečné množině X se dá vyjádřit jako průnik lineárních uspořádání.

Hint: Pro částečně uspořádanou množinu (X, \preceq) a neporovnatelné prvky $a, b \in X$ v relaci \preceq , uvažte relaci $\preceq_{a,b} = \preceq$ na X , kde $x \preceq_{a,b} y$, právě tehdy, když $x \preceq y \vee (x \leq a \ \& \ b \leq y)$.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>