Diskrétní matematika — 3. cvičení*

19. října 2023

1 Relace

Příklad 1. *Nechť R a S jsou ekvivalence na množině X. Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence:*

(a) $R \cup S$

(b) $R \setminus S$

(c) $R \circ S$

Příklad 2. *Kolik je na n-prvkové množině X relací? Kolik z nich je reflexivních? Kolik symetrických? Kolik relací je zároveň reflexivních a zároveň symetrických?*

2 Funkce

Zobrazení (respektive *funkce*) $f\colon X \to Y$ je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$, které je v relaci f s x. Funkce $f\colon X \to Y$ je

(a) *prostá* (neboli *injektivní*), pokud $f(x) \neq f(x')$ pro každé $x \neq x'$, $x, x' \in X$;

(b) *na* (neboli *surjektivní*), pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$;

(c) *vzájemně jednoznačná* (neboli *bijektivní*), pokud je prostá a na.

Jsou-li $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ funkce, pak jejich *složení* označujeme jako $g \circ f$ a jedná se o funkci $h\colon X \to Z$ danou předpisem $x \mapsto g(f(x))$. Všimněte si, že skládání je značené jinak než u relací!

Příklad 3. *Nechť $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ jsou zobrazení. Nechť $g \circ f$ je prosté.*

(a) Rozhodněte, zda f musí být prosté.

(b) Rozhodněte, zda g musí být prosté.

Příklad 4. *Najděte příklad*

(a) prosté funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která není na,

(b) funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která je na, ale není prostá.

Příklad 5. *Jaký je počet všech zobrazení $f\colon \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$? Co počet bijektivních zobrazení $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ a prostých zobrazení $f\colon \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$?*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/