Diskrétní matematika — 13. cvičení

7. ledna 2024

1 Základy pravděpodobnosti

Konečný pravděpodobnostní prostor je pár (Ω, P), kde Ω je konečná množina *elementárních jevů* a $P\colon 2^\Omega \to [0,1]$ je funkce taková, že $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \subseteq \Omega$. Podmnožiny $A \subseteq \Omega$ nazýváme *jevy* a $P(A)$ je *pravděpodobnost jevu* A. Jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou *nezávislé*, pokud pro každé $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ platí $P\left(\cap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$. Jsou-li A a B jevy s $P(B) > 0$, pak *podmíněná pravděpodobnost* $P(A \mid B)$ značí pravděpodobnost A za podmínky, že platí B. Máme $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Náhodnou veličinou na Ω je funkce $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$. *Střední hodnota* $\mathbb{E}[X]$ náhodné veličiny X se rovná $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$. Platí linearita střední hodnoty, čili pro každé dvě náhodné veličiny X a Y na Ω a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ a $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X]$. Jako *indikátorovou proměnnou* jevu A nazýváme náhodnou veličinu $I_A\colon \Omega \to \{0, 1\}$, kde $I_A(\omega) = 1$, pokud $\omega \in A$ a $I_A(\omega) = 0$ jinak. Pro I_A platí $\mathbb{E}[I_A] = P(A)$.

Příklad 1. *Dokažte, že jsou-li A a B nezávislé jevy v konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P), pak jejich doplňky $\overline{A} = \Omega \setminus A$ a $\overline{B} = \Omega \setminus B$ jsou nezávislé.*

Příklad 2. *Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Víme, že daná rodina má právě dvě děti a že aspoň jeden z nich je chlapec. Jaká je pravděpodobnost, že mají dva chlapce? Jaký pravděpodobnostní prostor zvolíte?*

Příklad 3. *Na lovu si každý z celkem n myslivců uniformně náhodně vybere jednho z n zajíců a poté všichni myslivci naráz vystřelí a žádný nemine. Jaká je střední hodnota počtu nezasažených zajíců? Jaký pravděpodobnostní prostor uvažujeme?*

Příklad 4. *Dokažte, že v konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) platí $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$ pro každou náhodnou veličinu X na Ω. Jako $\mathbb{E}[X^2]$ značíme výraz $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)^2 P(\{\omega\})$.*

Hint: Dokažte $0 \leq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

Příklad 5 (*). *Monty hall problem: Jste v televizní soutěži, ve které si jako výhru můžete odnést nové auto. Problémem je, že auto je schované za jedněmi ze tří dveří, za každými s toutéž pravděpodobností, a za zbýlymi dvěma dveřmi je jen kupka hnoje. K získání auta musíte ukázat na dveře, za kterými je auto schované. Na rozdíl od moderátora soutěže nevíte, které to jsou, a tak si vyberete uniformně náhodně jedny z nich. Moderátor poté zvolí jedny ze dveří, které jste nevybrali, a odhalí, že za nimi byla schovaná kupka hnoje (má-li moderátor na výběr z více dveří, které odhalit, také si vybere uniformně náhodně). Poté vám dá možnost si svou volbu rozmyslet a případně ukázat na druhé ještě neotevřené dveře. Za předpokladu, že raději vyhrajete nové auto než kupku hnoje, využijete jeho nabídku?*