

Diskrétní matematika — 12. cvičení

1. ledna 2024

1 Grafová barevnost

Zobrazení $b: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ nazveme *obarvením grafu* $G = (V, E)$, pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ platí $b(u) \neq b(v)$. *Barevnost grafu* G , označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G .

Příklad 1. *Bud' G rovinný graf neobsahující K_3 . Dokažte $\chi(G) \leq 4$.*

Příklad 2. *Zkuste najít graf G , jehož barevnost je větší než velikost největšího úplného grafu, který G obsahuje jako podgraf. Pro zajímavost: jak velkou barevnost dokážete vynutit v grafu, který neobsahuje K_3 ?*

Příklad 3. *Uvažujme graf Q_n (graf n -dimenzionální krychle), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0, 1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Čemu se rovná $\chi(Q_n)$?*

Příklad 4. *Máme-li pořadí vrcholů v_1, \dots, v_n grafu G a množinu barev $\{1, 2, \dots, k\}$, tak hladový algoritmus obarvení bere vrcholy v tomto pořadí a každému přiřadí minimální povolenou barvu.*

- (a) *Ukažte, že vždy existuje takové pořadí vrcholů, na kterém hladový algoritmus barvení použije $\chi(G)$ barev.*
- (b) *Ukažte, že existuje strom T a pořadí jeho vrcholů takové, že na něm hladový algoritmus obarvení spotřebuje $\Omega(\log n)$ barev.*