Diskrétní matematika
Zadání domácích úkolů

2. ledna 2024

1 Zadáno 9. 1. 2024 (Termín odevzdání 31. 1. 2024)

Příklad 1. *Dokažte, že pro každých n jevů $A_1, \ldots, A_n$ v konečném pravděpodobnostním prostoru platí* **[3]**

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Uveďte formální důkaz založený na definici pravděpodobnostního prostoru.

Příklad 2. *Dokažte, že v konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P), ve kterém je $|\Omega|$ prvočíslo a ve kterém mají všechny elementární jevy stejnou pravděpodobnost, neexistují dva netriviální nezávislé jevy. Za* triviální jevy *označujeme jevy $\emptyset$ a Ω.* **[4]**

Příklad 3. *Nechť π je permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$ vybraná uniformně náhodně z množiny S_n všech takových permutací. Označme jako $X(\pi)$ počet pevných bodů π, tedy počet $i \in \{1, \ldots, n\}$ s $\pi(i) = i$. Určete $\mathbb{E}[X]$.* **[3]**

Příklad 4. *Dokažte, že v konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) platí $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$ pro každou náhodnou veličinu X na Ω. Jako $\mathbb{E}[X^2]$ značíme výraz $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)^2 P(\{\omega\})$.* **[4]**

Hint: Dokažte $0 \leq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

Příklad 5. *Jako* kovarianci *dvou náhodných veličin X a Y označme*

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

(rozmyslete si, že uvedený vztah skutečně platí). Dokažte, že pro náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ platí **[3]**

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n \mathrm{Cov}[X_i, X_j].$$